I 24762

-- ANI 2022

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL VIII

ANUL 1928 — 1929.

BIBLIOTE[illegible]STRA"
SIBIU

TIMIȘOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1929

I 24762

ANUL VIII. 15 MARTIE 1928 NO. 1.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. GH. TH. GHEORGHIU. ASUPRA UNOR PROBLEME.
2. NOTE MATEMATICE, 1, 2, 3.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 653, 654, 659, 661, 663, 666, 674.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

2456

TIMISOARA
„Institut de Arte Grafice Cartea Românească"

Revista Matematică din Timişoara apare sub conducerea unui comitet compus din următorii:

Abason Ernest,	inginer, licenţiat în matematică, profesor la liceul Cantemir, Justinian 20, Bucureşti.
Abramescu N.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Adam D. Romeo,	sublt. de geniu, str. M. Gogâlniceanu 31, Bucureşti.
Adamescu Maxim,	licenţiat în matematici, inspector financiar, str. Floudor 37, Cernăuţi.
Alaci Valeriu,	doctor în matematici, profesor la şc. Politechnică Timişoara, str. Gen. Foch 27, Timişoara.
Alexandrescu El.,	profesoară la externatul secundar de fete, str. Argetoianu 7, Constanţa.
Angelescu A.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Angheluţă Th.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Arghir Iancu,	profesor la liceul din Tg.-Jiu.
Bădulescu Vasile,	profesor liceul M. Eminescu din Floreasca, Bucureşti.
Balaban N.,	profesor liceul Carol I, Craiova.
Balaban Gh.,	profesor la şc. secundară dc fete gr. II, „Sturza Cantacuzino", Roman.
Balasz D.,	inginer, asistent la şc. Politechnică, str. Gen. Joffre 12, Timişoara.
Bănărescu Marin,	Inginer la atelierele C. F. R., profesor la Politechnică, str. Doja 51, Timişoara.
Banciu I.,	profesor, str. Lucaci 95, Bucureşti.
Baron Constantin,	asistent la catedra de fizică, şc. Politechnică din Timişoara.
Blaşian V.,	inginer de mine, profesor la şc. Politechnică, Timişoara.
Botez Mihai,	profesor la şc. normală şi liceul milit., str. Speranţei, 12, Iaşi.
Bratu Gh.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Breazu D.,	profesor la liceul din Caracal.
Buicliu Gh.,	colonel în artilerie, Comandantul şcoalei speciale de artilerie, profesor la şc. Politechnică, Timişoara.
Burghele C.,	inginer. Serviciul hidraulic, Galaţi
Butoescu Traian,	inginer la uzina electrică Arad, asistent la şc. Politechnică.
Cândea C.,	doctor-inginer, profesor la şc. Politechnică din Timişoara.
Caraman E.,	director şc. Normală Galaţi.
Cărdeiu V.,	profesor la liceul Aron Pumnul, Cernăuţi.
Chivulescu C.,	licenţiat în matematici, inspector financiar, Târgovişte.
Cica Gh.,	profesor la şc. superioară de comerţ, Piteşti.
Cismărescu M.,	licenţiat în matematici, inspector financiar, T.-Severin.
Ciurceu V.,	inginer la uzina electrică Timişoara.
Corneanu P.,	inginer la societatea Concordia, Gura-Ocniţei, Dâmboviţa.
Constantinescu Gh.,	profesor, Piaţa Elca No. 18, Craiova.
Crăciunescu I.,	profesor la liceul Cantemir, Bucureşti.
Cristescu I.,	inginer, profesor la şc. Politechnică Timişoara.
Coman August,	directorul lic. C. Diaconovici-Loga, conferenţiar la şc. Politechnică, str. Feldioara 1, Timişoara.
Diaconescu Nic.,	profesor liceul din Slatina.
Dragalina Corneliu,	lt.-colonel, str. general Dragalina No. 1, Bucureşti.
Dumitrescu Gh.,	profesor, str. Gramont 16, Bucureşti.
Demetrescu Gh.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Dordea A. Traian,	profesor la liceul din Oltenita.
Dimitriu-Arad I.,	profesor la liceul Moise Nicoară, str. Bucur 3, Arad.
Duţulescu Marin,	licenţiat în matematici, inspector financiar, str. Eminescu 20, Bucureşii.
Florescu Mihai,	inginer inspector silvic, str. Alex. Orescu 9, Bucureşti.
Georgescu D.,	profesor la liceul din Piteşti, str. Negru Vodă 14, Piteşti.
Ghermănescu M.,	profesor la lic. Cantemir, str. Raion 31, Bucureşti.
Hubert M.,	inginer-arhitect, Bul. Mihai-Viteazul 21, Timişoara.
Hristea Horaţiu,	inginer la dep. C. F. R., asistent la şc. Politechnică, Timişoara.
Ionescu K. C.,	directorul liceului real Dr. Meşotă, Braşov.
Jecu M. Ioan,	licenţiat în matematici, str. V. Lascăr (Teilor) 77, Bucureşti.
Lalescu Traian,	doctor în matematici, profesor la Universitatea şi şc. Politechnică din Bucureşti, fost rector la şc. Politechnică din Timişoara, Vasile Boerescu 19, Bucureşti.
Leonida D.,	inginer, profesor la şc. Politechnică, str. Sălcii 11, Bucureşti.
Linteş I.,	căpitan de artilerie. str. Epicol 49, Bucureşti.
Liteanu Gh.,	maior în artilerie, Alea Sevastopol 27, Bucureşti.
Lupan Andrei,	inginer, director la Reşiţa, prof. la şc. Politechnică, str. Povernei 3, Bucureşti.
Magheru I.,	doctor în ştiinţe, profesor la şc. Politechnică, Timişoara.

Manughevici C.,	inginer-chimist, şef de lucrări la şc. Politechnică, str. Paul Chinezul 7, Timişoara.
Mardan D.,	inginer-şef, directorul Fabricei de Tutun, profesor la şc. Politechnică din Timişoara, Fabrica de Tutun din Timişoara.
Mihaly Elemér,	profesor la liceul din Deva.
Mioc V.,	profesor la liceul Diaconovici-Loga, Timişoara.
Naneş Gh.,	profesor la lic. Sf. Sava, Bucureşti.
Nicolau Alex.,	inginer, profesor la şc. Politechnică, Uzina electrică, Craiova.
Nicolau Pompiliu,	inginer, profesor la şc. Politechnică, Timişoara.
Noaghea Gh.,	profesor la liceul din Caransebeş
Nichifor Gh.,	doctor în matematici, conferenţiar la Universitatea din Bucureşti, str. Racoviţă 32, Bucureşti.
Niculescu Cristea,	inginer-şef. Director general la Soc. I. A. R., Arad.
Oncica Ioan,	profesor la liceul Piteşti.
Onicescu O.,	profesor universitar, Clopotarii-Vechi 25, Bucureşti.
Orăşeanu C.,	inginer-şef, licenţiat în matematici, profesor la şc. Politechnică Bucureşti.
Orăşeanu Gr.	profesor la liceul Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.
Otopeanu C.,	inginer.
Petrescu A.,	doctor în matematici, directorul Academiei Agricole, Cluj.
Petricoane D. M.,	directorul liceului din Oraviţa.
Purcariu Ilie,	director general, Ministerul de instrucţie publică, Bucureşti.
Roibănescu C.,	profesor, Bul. I. C. Brătianu 7, Tg.-Jiu.
Protopopescu I.,	inginer-şef, prof. şi subdirectorul şc Politechnice, Timişoara
Saegiu E.,	inginer-şef, serviciul construcţii C. F. R., str. Berzei 70, Bucureşti.
Şerbănescu Dumitru,	inginer la calea ferată Arad-Podgorie, asistent la şc. Politechnică.
Sergescu P.,	doctor în matematici, licenţiat în filozofie, profesor la Universitate Cluj.
Severineanu C.,	inginer-şef, subdirectorul serviciului Tracţiunei C. F. R. Profesor la şc. Politechnică Timişoara.
Simniceanu Sava,	profesor str. Griviţei 3, Craiova.
Spineanu Cezar,	profesor, str. Veştei 24, Târgoviste.
Stăncescu C.,	doctor-inginer, profesor la şc. Politechnică, str. Bem 8, Timişoara.
Stoicescu M.,	profesor, str. Zefirului 4, Bucureşti.
Teodorescu Constantin	inginer-şef, profesor la şc. Politechnică, directorul şc. superioare p. t. t. Timişoara.
Thierrin Gabriel,	directorul inst. Schwitz Thierrin. Scaune 33, Bucureşti.
Ţino Ovidiu,	profesor, liceul Şincai, str. Cornea 80, Bucureşti.
Popescu E.,	doctor în chimie dela Sorbona, profesor la şc. Politechnică, Bucureşti.
Teodosiu Avram,	doctor în matematici, profesor la Academia de Agricultură Cluj.
Vâlcovici V.,	doctor în matematici, rectorul şc. Politechnice, str. Doja 33, Timişoara.
Vasiliu M.,	inginer, asistent la şc. Politechnică Bucureşti, str. Obădeanu 10, Bucureşti.
Vasiliu Gh.	inginer la depozitul C. F. R., calea Traian 23, Satu-mare.
Vlad I. V.,	inginer-arhitect, profesor la şc. Politechnică, str. Bonnaz 20, Timişoara.
Zapan Grigore,	căpitan aviator, str. Carol 8, Tecuci.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

ANUL VIII — NO. 1. TIMISOARA, 15 MARTIE 1928

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

ASUPRA UNOR PROBLEME

de GH. TH. GHEORGHIU
Galați

In *„Bulletin scientifique de l'École Politechnique de Timișoara"*, Tome I, fasc. I, este publicată o lucrare a d-lui Profesor *V. Alaci.* Se găsesc aci mai multe formule generale cari ne permit a rezolva intr'un mod mai elegant problemele: 477, 501, 555, 561 din *„Revisia Matematică din Timișoara"* și problema 2860 din *„Gazeta Matematică"*.

In cele ce urmează vom însemna cu:

$$(1)\qquad \binom{p}{q}\ i\Big)_n' = \Sigma(-1)^{\lambda} C_p^{\lambda}\, \Gamma_q^{i-\lambda n},$$

unde C_m^n reprezintă simbolul combinărilor a m obiecte luate câte n, și Γ_m^n numărul combinărilor cu repetiție a m obiecte luate din n în n; iar λ este cel mai mare întreg cuprins în $\frac{i}{n}$ (2).

1. In locul citat se găsește la pag. 26, stabilită identitatea:

$$(a)\qquad (-4)^{s-r}\frac{\sin^{2s+1}2kt}{\sin^{2r}t} =$$

$$\binom{2s+1}{2r}\ 0\Big)_{2k}\sin 2[(2s+1)k-r]t+$$

$$\binom{2s+1}{2r}\ 1\Big)_{2k}\sin 2[(2s+1)k-r-1]t+\ldots$$

$$\ldots+\left[\binom{2s+1}{2r}\ (2s+1)k-r-1\right]_{2k}\sin 2t,$$

în care dacă facem: $s=2$, $k=r=1$, avem:

$$-4\frac{\sin^5 2t}{\sin^2 t} = \binom{5}{2}\ 0\Big)_2\sin 8t+\binom{5}{2}\ 1\Big)_2\sin 6t+$$

$$\binom{5}{2}\ 2\Big)_2\sin 4t+\binom{5}{2}\ 3\Big)_2\sin 2t,$$

și ținând seamă de (1) și (2) găsim:

$$\binom{5}{2}\ 0\Big)_2=\Gamma_2^0=1;\quad \binom{5}{2}\ 1\Big)_2=\Gamma_2^1=2;$$

$$\binom{5}{2}\ 2\Big)_2=\Gamma_2^2-C_5^1\Gamma_2^0=-2;$$

$$\binom{5}{2}\ 3\Big)_2=\Gamma_2^3-C_5^1\Gamma_2^1=-6,$$

deci:

$$-4\frac{\sin^5 2t}{\sin^2 t}=\sin 8t+2\sin 6t-2\sin 4t-6\sin 2t$$

$$\therefore\quad \frac{6\sin 2t+2\sin 4t-2\sin 6t-\sin 8t}{4}=\frac{\sin^5 2t}{\sin^2 t}$$

care este tocmai problema No. 477.

2. La pag. 28, în locul citat, se găsește identitatea:

$$(b)\qquad \frac{\sin^p(2k+1)t}{\sin^q t}=\frac{(-1)^r}{2^{2r}}\left[\binom{p}{q}\ pk+r\Big)_{2k+1}\sin t+\right.$$

$$\binom{p}{q}\ pk+r-1\Big)_{2k+1}\sin 3t+\ldots$$

$$\ldots+\binom{p}{q}\ 1\Big)_{2k+1}\sin[2(pk+r)-1]t+$$

$$\left.\binom{p}{q}\ 0\Big)_{2k+1}\sin[2(pk+r)+1]t\right],$$

unde: $2r+1=p-q$ (deci nu se aplică decât în cazul când diferența $p-q$ este impară). Dacă facem în (b): $p=4$, $q=1$, avem:

$$\frac{\sin^4(2k+1)t}{\sin t}=-\frac{1}{4}\left[\binom{4}{1}\ 4k+1\Big)_{2k+1}\sin t+\right.$$

$$\binom{4}{1}\ 4k\Big)_{2k+1}\sin 3t+\ldots+\binom{4}{1}\ 1\Big)_{2k+1}\sin(8k+1)t$$

$$\left.+\binom{4}{1}\ 0\Big)_{2k+1}\sin(8k+3)t\right],$$

și ținând seamă de (1) și (2):

$$\binom{4}{1}\ 4k+1\Big)_{2k+1} = \Gamma_1^{4k+1} - C_4^1\,\Gamma_1^{2k} = -3$$

$$\binom{4}{1}\ 4k\Big)_{2k+1} = \Gamma_1^{4k} - C_4^1\,\Gamma_1^{2k-1} = -3$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\binom{4}{1}\ 2k+2\Big)_{2k+1} = \Gamma_1^{2k+2} - C_4^1\,\Gamma_1^{1} = -3$$

$$\binom{4}{1}\ 2k+1\Big)_{2k+1} = \Gamma_1^{2k+1} - C_4^1\,\Gamma_1^{0} = -3$$

$$\binom{4}{1}\ 2k\Big)_{2k+1} = \Gamma_1^{2k} = 1$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\binom{4}{1}\ 1\Big)_{2k+1} = \Gamma_1^{1} = 1$$

$$\binom{4}{1}\ 0\Big)_{2k+1} = \Gamma_1^{0} = 1.$$

Rezultă pe aci că avem:

$$\frac{\sin^4(2k+1)t}{\sin t} = -\frac{1}{4}\Big[-3\sin t - 3\sin 3t - \ldots$$

$$\ldots - 3\sin(4k+1)t + \sin(4k+3)t + \ldots + \sin(8k+3)t\Big],$$

care se mai poate scrie:

$$3\sum_{i=1}^{2k}\sin(2i+1)t - \sum_{i=1}^{2k}\sin(4k+2i+3)t = 4\,\frac{\sin^4(2k+1)t}{\sin t},$$

și care este tocmai problema No. 501.

3. Mai departe în cartea citată mai sus, se găsește la pag. 33, stabilită identitatea:

$$(c)\qquad \frac{\sin^{2s} 2kt}{\sin^{2r+1} t} =$$

$$\frac{(-1)^{s-r-1}}{2^{2(s-r-1)}}\Big[\binom{2s}{2r+1}\ 0\Big)_{2k}\sin[2(2sk-r)-1]t +$$

$$\binom{2s}{2r+1}\ 1\Big)_{2k}\sin[2(2sk-r)-3]t + \ldots$$

$$\ldots + \binom{2s}{2r+1}\ 2sk-r-1\Big)\sin t\Big],$$

în care dacă facem: $s=3$, $r=0$, avem:

$$\frac{\sin^6 2kt}{\sin t} = \frac{1}{16}\Big[\binom{6}{1}\ 0\Big)_{2k}\sin(12k-1)t +$$

$$\binom{6}{1}\ 1\Big)_{2k}\sin(12k-3)t + \ldots + \binom{6}{1}\ 6k-1\Big)_{2k}\sin t\Big]$$

și ținând seamă de (1) și (2), găsim:

$$\binom{6}{1}\ 0\Big)_{2k} = \Gamma_1^0 = 1$$

$$\binom{6}{1}\ 1\Big)_{2k} = \Gamma_1^1 = 1$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\binom{6}{1}\ 2k-1\Big)_{2k} = \Gamma_1^{2k-1} = 1$$

$$\binom{6}{1}\ 2k\Big)_{2k} = \Gamma_1^{2k} - C_6^1\,\Gamma_1^0 = -5$$

$$\binom{6}{1}\ 2k+1\Big)_{2k} = \Gamma_1^{2k+1} - C_6^1\,\Gamma_1^1 = -5$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\binom{6}{1}\ 4k-1\Big)_{2k} = \Gamma_1^{4k-1} - C_6^1\,\Gamma_1^{2k-1} = -5$$

$$\binom{6}{1}\ 4k\Big)_{2k} = \Gamma_1^{4k} - C_6^1\,\Gamma_1^{2k} + C_6^2\,\Gamma_1^0 = 10$$

$$\binom{6}{1}\ 4k+1\Big)_{2k} = \Gamma_1^{4k+1} - C_6^1\,\Gamma_1^{2k+1} + C_6^2\,\Gamma_1^1 = 10$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\binom{6}{1}\ 6k-1\Big)_{2k} = \Gamma_1^{6k-1} - C_6^1\,\Gamma_1^{4k-1} + C_6^2\,\Gamma_1^{2k-1} = 10$$

și ținând seamă de acestea, putem scrie:

$$\frac{\sin^6 2kt}{\sin t} = \frac{1}{16}\Big[\sin(12k-1)t + \sin(12k-3)t + \ldots$$

$$\ldots + \sin(8k+1)t - 5\sin(8k-1)t - 5\sin(8k-3)t - \ldots$$

$$\ldots - 5\sin(4k+1)t + 10\sin(4k-1)t +$$

$$10\sin(4k-3)t + \ldots + 10\sin t\Big],$$

care se mai poate scrie încă:

$$10\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(2i+1)t - 5\sum_{i=1}^{2k-1}\sin(4k+2i+1)t +$$

$$\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(8k+2i+1) = 16\,\frac{\sin^6 2kt}{\sin t},$$

adică tocmai identitatea care face subiectul problemei No. 555.

4. Dacă în identitatea (*c*) facem: $s=3$, $r=0$: avem:

$$\frac{\sin^4 2kt}{\sin t}=-\frac{1}{4}\left[\binom{4}{1}\,0\Big)_{2k}\sin(8k-1)t+\binom{4}{1}\,1\Big)_{2k}\sin(8k-3)t+\ldots+\binom{4}{1}\,4k-1\Big)_{2k}\sin t\right],$$

şi ţinând seamă de (1) şi (2):

$$\binom{4}{1}\,0\Big)_{2k}=\Gamma_1^0=1$$

$$\binom{4}{1}\,1\Big)_{2k}=\Gamma_1^1=1$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\binom{4}{1}\,2k-1\Big)_{2k}=\Gamma_1^{2k-1}=1$$

$$\binom{4}{1}\,2k\Big)_{2k}=\Gamma_1^{2k}-C_4^1\Gamma_1^0=-3$$

$$\binom{4}{1}\,2k+1\Big)_{2k}=\Gamma_1^{2k+1}-C_4^1\Gamma_1^1=-3$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\binom{4}{1}\,4k-1\Big)_{2k}=\Gamma_1^{4k-1}-C_4^1\Gamma_1^{2k-1}=-3,$$

şi deci:

$$\frac{\sin^4 2kt}{\sin t}=-\frac{1}{4}\left[\sin(8k-1)t+\sin(8k-3)t+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\sin(4k+1)t-3\sin(4k-1)t-\ldots-3\sin t\right]$$

sau mai pe scurt:

$$3\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(2i+1)t-\sum_{i=0}^{2k-1}\sin(4k+2i+1)t=4\frac{\sin^4 2kt}{\sin t},$$

adică tocmai relaţia ce face subiectul problemei No. 561.

5. Dacă acum în identitatea (*b*) facem: $p=3$, $q=2$, $(r=0)$, avem:

$$\frac{\sin^3(2k+1)t}{\sin^2 t}=\binom{3}{2}\,3k\Big)_{2k+1}\sin t+\binom{3}{2}\,3k-1\Big)_{2k+1}\sin 3t+\ldots$$
$$\ldots+\binom{3}{2}\,1\Big)_{2k+1}\sin(6k-1)t+\binom{3}{2}\,0\Big)_{2k+1}\sin(6k+1)t$$

şi ţinând seamă de (1) şi (2), putem scrie:

$$\binom{3}{2}\,3k\Big)_{2k+1}=\Gamma_2^{3k}-C_3^1\Gamma_2^{k-1}=(3k+1)-3k=1$$

$$\binom{3}{2}\,3k-1\Big)_{2k+1}=\Gamma_2^{3k-1}-C_3^1\Gamma_1^{k-2}=3k-3(k-1)=3$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\binom{3}{2}\,2k+2\Big)_{2k+1}=\Gamma_2^{2k+2}-C_3^1\Gamma_2^1=(2k+3)-6=2k-3$$

$$\binom{3}{2}\,2k+1\Big)_{2k+1}=\Gamma_2^{2k+1}-C_3^1\Gamma_2^0=(2k+2)-3=2k-1$$

$$\binom{3}{2}\,2k\Big)_{2k+1}=\Gamma_2^{2k}=2k+1$$

$$\binom{3}{2}\,2k-1\Big)_{2k+1}=\Gamma_2^{2k-1}=2k$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\binom{3}{2}\,0\Big)_{2k+1}=\Gamma_2^1=1,$$

şi deci:

$$\frac{\sin^3(2k+1)t}{\sin^2 t}=\sin t+3\sin 3t+\ldots$$
$$\ldots+(2k+1)\sin(2k+1)t+2k\sin(2k+3)t+$$
$$(2k-1)\sin(2k+5)t+\ldots+\sin(6k+1)t$$

sau mai pe scurt:

$$\sum_{i=0}^{k}(2i+1)\sin(2i+1)t+\sum_{i=1}^{2k}(2k-i+1)\sin(2k+2i+1)t=\frac{\sin^3(2k+1)t}{\sin^2 t}$$

care este relaţia ce face subiectul problemei No. 2860 din „*Gazeta Matematică*".

Am scris acest articol nu atât pentru a da o soluţie mai elegantă acestor probleme, ci mai mult pentru a pune la îndemâna corespondenţilor acestei reviste, importantele formule (*a*), (*b*) şi (*c*).

NOTE MATEMATICE

1. — In „*Gazeta Matematică*“, vol. XXXII, No. 2, exercițiul 14, d-l *I. I. Georgescu-Racoviță* generalizează exercițiul 1 din „*Foaia Matematică*“, anul III. In cele ce urmează voiu da o generalizare ambelor exerciții, propunându-mi suma:

$$S_m = (a\,a)^m + (a\,0\,a)^m + (a\,0\,0\,a)^m \ldots$$

unde avem n paranteze.

Suma se poate scri:

$$S_m = a^m [11^m + 101^m + 1001^m + \ldots] =$$
$$a^m [(10+1)^m + (10^2+1)^m + (10^3+1)^m + \ldots].$$

Dezvoltând parantezele mici după formula desvoltării binomului lui *Newton*, avem:

$$(10+1)^m = 10^m + C_m^1 10^{m-1} + C_m^2 10^{m-2} + \ldots + 1$$
$$(10^2+1)^m = 10^{2m} + C_m^1 10^{2(m-1)} + C_m^2 10^{2(m-2)} + \ldots + 1$$
$$(10^3+1)^m = 10^{3m} + C_m^1 10^{3(m-1)} + C_m^2 10^{3(m-2)} + \ldots + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sumând aceste relații membru cu membru și înmulțindu-le cu a^m, obținem:

$$S_m = a^m [10^m (1 + 10^m + 10^{2m} + 10^{3m} + \ldots) +$$
$$C_m^1 10^{m-1} (1 + 10^{m-1} + 10^{2(m-1)} +$$
$$10^{3(m-1)} + \ldots) + \ldots + n],$$

sau:

$$S_m = a^m \left[10^m \frac{10^{nm}-1}{10^m-1} + C_m^1 10^{m-1} \frac{10^{n(m-1)}-1}{10^{m-1}-1} + \ldots + n\right].$$

Dacă facem $m=1$, obținem:

$$S_1 = 10\,a \frac{10^{n+1}-1}{9} + n\,a,$$

tocmai exercițiul 14 „*Gazeta Matematică*“, XXXII, No. 2, iar dacă facem: $a=1$, $m=1$, obținem exercițiul 1 din „*Foaia Matematică*“, anul III.

NIC. O. ZAHARIA
lic. Constanța

2. — *Asupra problemei 437.* Rezolvată în *R. M. T.*, anul V, No. 5, pag. 77. Problema se poate generaliza astfel. *Să se stabilească relația:*

$$s^n = \frac{r^{2n}}{2^n}\left[\frac{a^n + 2^n c^n}{h_a^n} + \frac{b^n + 2^n a^n}{h_b^n} + \frac{c^n + 2^n b^n}{h_s^n}\right].$$

Folosim formulele cunoscute;

$$h_a = \frac{2s}{a},\ h_b = \frac{2s}{b},\ h_c = \frac{2s}{c},\ a+b+c = 2p,\ pr = s.$$

Insemnând cu A membrul al 2-lea, putem scri succesiv:

$$A = \frac{r^{2n}}{2^n}\left(\frac{a^{2n} + 2^n a^n c^n}{2^n s^n} + \frac{b^{2n} + 2^n a^n b^n + c^{2n} + 2^n b^n c^n}{2^n s^n}\right)$$
$$= \frac{r^{2n}}{2^n}\left(\frac{a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} + 2^n \sum a^n b^n}{2^n s^n}\right),$$

TUDOSE G TANASE
lic. Câmpina

3. — *Două probleme de geometrie analitică.* Imi propun să soluționez analitic următoarele două chestiuni:

1) *Locul centrelor conicelor conjugate cu un triunghiu dat și care se văd dintr'un punct fix sub un unghiu drept, este o dreaptă:*

2) *Locul centrelor conicelor ce trec printr'un punct fix și conjugate cu un triunghiu dat, este o conică circumscrisă triunghiului.*

1) Fie:

$$(1)\qquad \begin{aligned} P &\equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ Q &\equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \\ R &\equiv a_3 x + b_3 y + c_3 = 0, \end{aligned}$$

ecuațiile laturilor triunghiului. Pentru ca aceste drepte să formeze un triunghiu veritabil trebue ca:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ecuațiile (1) sunt raportate la axe perpendiculare oarecare, a căror origină este punctul fix din problemă. Ecuația conicei conjugate este:

$$(2)\qquad f(x, y) \equiv \alpha P^2 + \beta Q^2 + R^2 = 0,$$

unde α, β sunt parametri variabili.

Ecuaţia fascicolului tangentelor duse din punctul (x_0, y_0) la conica (2) este:

$$(3)\quad (x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0})^2 - 4 f(x, y) f(x_0, y_0) = 0,$$

unde se va pune după desvoltare $z = z_0 = 1$.

In cazul nostru avem:

$$f(x_0, y_0) = f(0, 0) = \alpha c_1^2 + \beta c_2^2 + c_3^2.$$

Coeficientul lui x^2 în ecuaţia (2) este:

$$A = (\alpha a_1 c_1 + \beta a_2 c_2 + a_3 c_3)^2 - (\alpha c_1^2 + \beta c_2^2 + c_3^2)(\alpha a_1^2 + \beta a_2^2 + a_3^2).$$

Coeficientul lui y^2 în aceiaşi ecuaţie este:

$$B = (\alpha b_1 c_1 + \beta b_2 c_2 + b_3 c_3)^2 - (\alpha c_1^2 + \beta c_2^2 + c_3^2)(\alpha b_1^2 + \beta b_2^2 + b_3^2).$$

Condiţia de perpendicularitate este:

$$(4)\quad (\alpha a_1 c_1 + \beta a_2 c_2 + a_2 c_3)^2 + (\alpha b_1 c_1 + \beta b_2 c_2 + b_3 c_3)^2 - (\alpha c_1^2 + \beta c_2^2 + c_3^2)[(a_1^2 + b_1^2)\alpha + (a_2^2 + b_2^2)\beta + a_3^2 + b_3^2] = 0.$$

Dacă însemnăm cu A_i minorii elementelor a_i din determinantul Δ, condiţia (4) se scrie aşa:

$$(5)\quad (A_3^2 + B_3^2)\alpha\beta + (A_2^2 + B_2^2)\alpha + (A_1^2 + B_1^2)\beta = 0.$$

Ecuaţiile centrului conicei sunt:

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} f'_x = \alpha a_1 P + \beta a_2 Q + a_3 R = 0 \\ \frac{1}{2} f'_y = \alpha b_1 P + \beta b_3 Q + b_3 R = 0 \end{cases}$$

Pentru a găsi locul centrului, vom elimina α, β între ecuaţiile (5) şi (6). Din (6) deducem:

$$\alpha = -\frac{C_1 QR}{C_3 PQ}, \quad \beta = \frac{C_2 PR}{C_3 PQ}.$$

In aceste expresii C_i au semnificarea lui A_i sau B_i. Introducând aceste valori în (5) rezultă:

$$C_2 C_3 (A_1^2 + B_1^2) P - C_1 C_3 (A_2^2 + B_2^2) Q - C_1 C_2 (A_3^2 + B_3^2) R = 0,$$

care reprezintă o dreaptă, căci P, Q, R sunt polinoame de gradul I în x şi y.

2) Ca şi la prima problemă ecuaţiile (1) sunt raportate la aceleaşi axe cu origina în punctul din problemă.

Ecuaţia conicei conjugate o scriem aşa:

$$(7)\quad f(x, y) = l P^2 + m Q^2 + n R^2 = 0,$$

unde l, m, n sunt parametri variabili sub formă omogenă. Scriind că conica (7) trece prin origină:

$$(8)\quad c_1 l + c_2 m + c_3 n = 0.$$

Ecuaţiile centrului sunt:

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} f'_x = a_1 l P + a_2 m Q + a_3 n R = 0 \\ \frac{1}{2} f'_y = b_1 l P + b_2 m Q + b_3 n R = 0 \end{cases}$$

Eliminând parametrii între (8) şi (9) găsim ecuaţia locului geometric:

$$\begin{vmatrix} a_1 P & a_2 Q & a_3 R \\ b_1 P & b_2 Q & b_3 R \\ c_1 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Desvoltând determinantul găsim:

$$c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) QR + c_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) PR + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) PQ = 0,$$

care probează că locul geometric este o conică circumscrisă triunghiului format de dreptele (1) din problemă.

Observare. Problemele se puteau trata şi în coordonate tangenţiale.

VIRGIL COSNITA
student, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIII, No. 6, Februarie 1928. Câteva clase de polioame cu toate rădăcinele reale; polinoamele lui *Hermite* (urmare), de *Alexandru Niculescu*. Asupra însemnărei laplacianului, de *Petre Sergescu*. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului de matematici aplicate la ştiinţele militare, pe intervalul 1 Septembrie 1926 — 31 August 1927, de: *Căpitan Ghimuş, Locot.-Col. Gh. I. Liteanu, C. Malcoci*.

2. *Revista de Ciencias*, Ano XXX, Lima-Peru, Iulio a Septembre Ns. 7 à 9. La Mecánica Celesta de *Wronsky*, Dr. Ing. *Godofredo Garcia*. La ombra de *Newton en* Mecanica y en Astronomia, Dr. Ing. *Valentin Gama*.

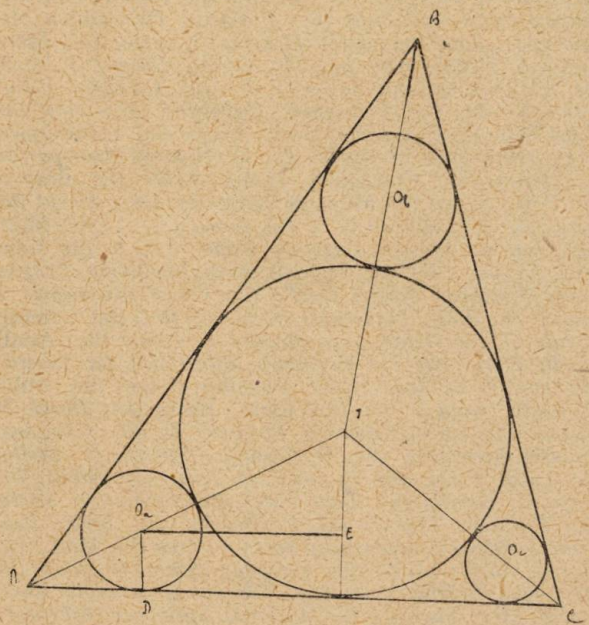
PROBLEME REZOLVATE

653. — *Dacă ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c sunt razele cercurilor cu centrele în O_a, O_b, O_c, tangente interior la câte două din laturile triunghiului ABC şi la cercul înscris cu centrul în I şi cu raza r, să se demonstreze că:*

1°. $\dfrac{1}{\sqrt{\varrho_a}}+\dfrac{1}{\sqrt{\varrho_b}}+\dfrac{1}{\sqrt{\varrho_c}}=\dfrac{1}{\sqrt{r}}\sum \operatorname{cotg}\dfrac{\pi-a}{4}$

2°. $\dfrac{IO_a-\varrho_a}{IO_b-\varrho_b}+\dfrac{IO_b-\varrho_b}{IO_c-\varrho_c}+\dfrac{IO_c-\varrho_c}{IO_a-\varrho_a}=3.$

GH. GH. VASILIU



1°. Ducem O_aE paralelă cu AC şi din asemănarea triunghiurilor AO_aD şi O_aIE deducem:

$$(1)\qquad \frac{AO_a}{O_aI}=\frac{O_aD}{IE}.$$

Dar:

$$O_aI=\varrho_a+r,\ O_aD=\varrho_a,\ IE=r-\varrho_a,$$

şi (1) devine:

$$(2)\qquad \frac{AO_a}{\varrho_a+r}=\frac{\varrho_a}{r-\varrho_a}.$$

De altă parte din triunghiul dreptunghic AO_aD, deducem:

$$\varrho_a=AO_a\cos\frac{\pi-A}{2}.$$

Inlocuind aci valoarea lui AO_a scoasă din (2), găsim:

$$\varrho_a=\frac{\varrho_a(\varrho_a+r)}{r-\varrho_a}\cos\frac{\pi-A}{2}.$$

Simplificând cu ϱ_a, obţinem:

$$r-\varrho_a=(\varrho_a+r)\cos\frac{\pi-A}{2}$$

$$\therefore\quad \varrho_a\left(1+\cos\frac{\pi-A}{2}\right)=r\left(1-\cos\frac{\pi-A}{2}\right),$$

sau:

$$\varrho_a=r\frac{1-\cos\frac{\pi-A}{2}}{1+\cos\frac{\pi-A}{2}}=r\frac{2\sin^2\frac{\pi-A}{4}}{2\cos^2\frac{\pi-A}{4}}=r\operatorname{tg}^2\frac{\pi-A}{4}$$

$$(3)\qquad \therefore\quad \frac{1}{\sqrt{\varrho_a}}=\frac{1}{\sqrt{r}}\operatorname{cotg}\frac{\pi-A}{4}.$$

Analog deducem:

$$(4)\qquad \frac{1}{\sqrt{\varrho_b}}=\frac{1}{\sqrt{r}}\operatorname{cotg}\frac{\pi-B}{4},\quad \frac{1}{\sqrt{\varrho_c}}=\frac{1}{\sqrt{r}}\operatorname{cotg}\frac{\pi-C}{4}$$

Adunând relaţiile (3) şi (4), deducem:

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho_a}}+\frac{1}{\sqrt{\varrho_b}}+\frac{1}{\sqrt{\varrho_c}}=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum\operatorname{cotg}\frac{\pi-A}{4},$$

şi avem astfel stabilită prima relaţie cerută.

2°. Fiindcă centrele O_a, O_b, O_c se găsesc pe bisectoarele interioare, pe care se găseşte şi centrul I, rezultă:

$$IO_a=r+\varrho_a,\ IO_b=r-\varrho_b,\ IO_c=r+\varrho_c,$$

şi atunci:

$$\frac{IO_a-\varrho_a}{IO_b-\varrho_b}+\frac{IO_b-\varrho_b}{IO_c-\varrho_c}+\frac{IO_c-\varrho_c}{IO_a-\varrho_a}$$

$$=\frac{r}{r}+\frac{r}{r}+\frac{r}{r}=3.$$

A doua relaţie cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iaşi), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focşani), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-

Basarab, București), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Handler Gheorghe*, *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Micula O.* (lic. Timișoara), *Morțun C-tin* (Semin. Pedag., Iași), *Popovici M.* (Focșani), *Saur O. Ioan*, *Savin Arnold* (lic. Focșani), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iași) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași).

Generalizare. D-l *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), a stabilit relațiile mai generale:

$$1^0.\quad \frac{1}{\sqrt[m]{\varrho_a}}+\frac{1}{\sqrt[m]{\varrho_b}}+\frac{1}{\sqrt[m]{\varrho_c}}=\frac{1}{\sqrt[m]{r}}\sum \operatorname{cotg}^m\frac{\pi-A}{4}$$

$$2^0.\quad \left(\frac{IO_a-\varrho_a}{IO_b-\varrho_b}\right)^m+\left(\frac{IO_b-\varrho_b}{IO_c-\varrho_c}\right)^m+\left(\frac{IO_c-\varrho_c}{IO_a-\varrho_a}\right)^m=3$$

654. — *Care-i pătratul perfect de șase cifre, în care prima cifră este egală cu a treia, ultima cifră scrisă după a patra dă un număr egal cu pătratul primei cifre; în fine a cincea cifră, scrisă după a doua, dă tocmai ultima cifră mărită cu unitatea?*

ION Z PANTU

Fie $abcdef$ pătratul cerut. Conform enunțului, avem:

$$(1)\qquad a=c,\quad df=a^2,\quad bc=f+1.$$

Vom deosebi două cazuri.

1^0. $b=0$, deci:

$$e=f+1,$$

și cum ef sunt ultimele două cifre ale unui pătrat perfect, vom lua din terminațiile de două cifre cunoscute, numai pe acelea în care prima întrece pe a 2-a cu 1, adică:

$$ef=21,\quad ef=76.$$

Dacă luăm $ef=21$, atunci: $a^2=d1=01$, 81, deci $a=1$ sau 9, rezultă că $abcdef$ ar putea fi:

101021, 909821,

dar nici unul nu-i pătrat perfect.

Dacă luăm $ef=76$, atunci: $a^2=d6=16$ sau 36 deci $a=4$ sau 6, rezultă că $abcdef$ ar putea fi:

404176, 606376.

2^0. $b=1$, deci $f=9$. $e=0$, $a^2=d9=09$ sau 49, de unde $a=3$ sau 7. Rezultă că $abcdef$ ar putea fi:

313009, 717409,

dintre care numai:

$$717409=847^2,$$

este pătrat perfect și ne dă singura soluție a problemei.

Soluție dată de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Aldea Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjean Petru* (lic. Caransebeș), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Avramescu Th. Ion* (lic. Carol, Craiova), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Boncea N. Spiridon* (lic. Pitești), *Bratoșin N. Radu* (lic. Brașov), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Cernăuți Iosif* (lic Timișoara), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iași), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Cristescu C. Ion* (lic. Lazăr, București), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dăscălescu Șt. Hristache* (lic. Focșani), *Demetrescu August* (lic. Lazăr, București), *Diaconu H. Aurel* (lic. Milit., Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Dumitrescu Nicolae* (lic. Timișoara), *Ettinger I. Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Hamparțum R. Grigore* (lic. Constanța), *Hohoi Vasile* (lic. Brașov), *Iacob Șt. Eugen* (Șc. Milit. de Artilerie), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Iliovici G. C-tin*, *Ionescu C. C.* (lic. Milit., Iași), *Ionescu Ion* (lic. Caracal), *Ivanovici I. N.* (lic. Călărași), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Lenghel Elena* (Craiova), *Magda Ovidiu* (lic. Cluj), *Marineanu T. Traian* (Șc. Polit., Timișoara), *Mazilescu Dolj* (lic. Caracal), *Micula O.* (lic. Timișoara), *Mocuța T. Traian* (lic. Arad), *Moritz Davidsohn* (lic. Botoșani), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Oighenstein D.* (lic. Bălți), *Panaitescu Ion* (lic. Milit., Craiova), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popescu Șt. Toma* (lic. Pitești), *Popescu C. Virgiliu* (lic. Târgoviște), *Procopiescu Șt. Nestor* (lic. Caracal), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roth Ladislau* (Caransebeș), *Sassu V. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Savin Arnold* (lic. Focșani), *Savin C. Ioan* (lic. Milit.-Iași), *Scarlat V. D.* (lic. Câmpina), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Streit Victor* (lic. Internat, Iași), *Teodorescu Aurel* (lic. R.-Sărat), *Țiugan Marin*, *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara), *Tudose Tănase* (lic. Câmpina), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Șc. Polit., Leoben-Austria), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ioan*, *Zaharia O. Ioan* (lic. Constanța) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

659. — *Să se stabilească identitatea:*

$$4\prod_{k=1}^{3}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{7}\right)-4\prod_{k=1}^{3}\left[\cos t-\cos\frac{(2k-1)\pi}{6}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t.$$

V. ȚALAC

Dacă în formulele (9) şi (6) din articolul „*Sume trigonometrice transformate în produse*“, din „R. M. T“, anul VII, No. 9, luăm $n=3$, avem:

$$4\prod_{k=1}^{3}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{7}\right)=\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cos 3t$$

$$4\prod_{k=1}^{3}\left[\cos t-\cos\frac{(2k-1)\pi}{6}\right]=\cos 3t.$$

Prin scădere obţinem:

$$4\prod_{k=1}^{3}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{7}\right)-$$

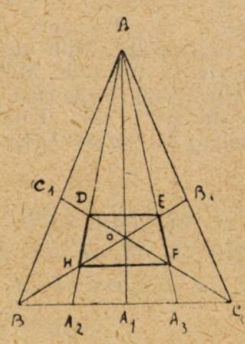
$$4\prod_{k=1}^{3}\left[\cos t-\cos\frac{(2k-1)\pi}{6}\right]=\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t,$$

care este identitatea cerută.

Soluţii date de d-nii: *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad) şi *Bratoşin Radu* (lic. Braşov), *Brotmann I.* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Climescu C. Al.* (Semin. Pedag., Iaşi), *Craiu N. Ion* (lic. Caransebeş), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit, Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Micula O.* (lic. Timişoara), *Morţun Ar. C-tin* (Semin. Pedag., Iaşi), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina) şi *Zaharia O. Ion* (lic. Constanţa).

661. — *Se dă un triunghiu isoscel* ABC. *Fie* A_1 *piciorul perpendicularei dusă din* A *pe* BC. *Bisectoarele unghiurilor* A_1AB *şi* A_1AC *taie fiecare din bisectoarele unghiurilor* B *şi* C. *Se obţin astfel patru puncte care sunt vârfurile unui trapez isoscel.*

COSNITA CEZAR



Construim figura în condiţiile problemei. Observăm că triunghiul $BAH=AFC$, ea având $AB=AC$ şi unghiurile alăturate lor respectiv egale, rezultă:

$$BH=CF,$$

şi cum triunghiul BOC este isoscel, rezultă că HF este paralelă la BC, ca împărţind în părţi proporţionale laturile triunghiului BOC. Triunghiul AA_2A_3 fiind isoscel şi triunghiul AHF este isoscel.

Apoi din egalitatea triunghiurilor BB_1C şi CC_1B rezultă:

$$BC_1=CB_1 \text{ şi } \overset{\frown}{BB_1C}=\overset{\frown}{CC_1B},$$

urmează că şi triunghiurile AB_1E, AC_1D sunt egale având câte o latură şi câte două unghiuri adiacente respectiv egale, rezultă:

$$AD=AE$$

şi DE împărţind în părţi proporţionale laturile triunghiului isoscel AHF, este paralelă cu HF. Patrulaterul $HDEF$ este un trapez isoscel.

Soluţii date de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ), *Aldea N.* (lic. M-rea Dealu), *Alexandrescu Ionel, Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Balaban I. Gh.* (Bârlad), *Boncea N. Spiridon* (lic. Piteşti), *Bordeianu Adrian* (lic. Milit., Iaşi), *Bucurescu Ionel* (lic. Odorhei), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Cioclov Gh.* (lic. T.-Severin), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iaşi), *Cocârlan Pavel* (lic. Timişoara), *Craiu N. Ion* (Caransebeş), *Cristescu C. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Dănciulescu G. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dăscălescu St. Hristache* (lic. Fo şani), *Demetrescu August* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Diaconescu Aurel* (lic. Milit., Craiova), *Dimitriu A. Ioan* (lic. Galaţi), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Drăgan I. Corneliu* (lic. Botoşani), *Drăguşeanu Octavian* (lic. Milit., Iaşi), *Drăguţ G. Vasile* (lic. Târgovişte), *Dumitrescu Nicolae* (lic. Timişoara), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Haimovici A.* (lic. Naţional, Iaşi), *Hohoi Vasile* (lic. Braşov), *Iacob St. Eugen* (Şc. Milit., de Artilerie), *Ignat Paul* (lic. Milit., Iaşi), *Iliescu Petre* (lic. Bolgrad), *Iliovici G. C-tin* (student), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeş), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Ivanovici Valentin* (lic. Călăraşi), *Julea D. Vintilă* (lic. T.-Severin), *Koneczny Artur* (Paşcani), *Leibovici R. Ermil* (lic. Piteşti), *Magda Ovidiu* (lic. Cluj), *Mălăescu Traian* (lic. Arad), *Micula O.* (lic. Timişoara), *Mihuţ Metodie* (lic. Caransebeş), *Mocuţa T. Traian* (lic. Arad), *Morţun Ar. C-tin* (Semin. Pedag., Iaşi), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Neacşu Vasile* (Şc. Polit., Timişoara), *Novac Aurel* (lic. Cluj), *Oigenstein David* (lic. Bălţi), *Panaitescu C. Ion* (lic. Milit., Craiova), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pârvulescu Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), *Popescu D. Nicolae* (lic. Calafat),

Popescu St. Toma (lic. Pitești), *Popescu C. Virgiliu* (Târgoviște), *Popovici M.* (Focșani), *Procopiescu St. Nestor* (lic. Caracal), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Rusmănică Ioan* (lic. Brașov), *Sabetay L. Andrei* (T.-Severin), *Savin Arnold* (lic. Focșani), *Savin C. Ion* (lic. Milit., Iași), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iași), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Scurtu A. Nicolae* (lic. Brașov), *Sîrchis I.* (lic. Tighina), *Șoimulescu I.* (lic. Buzești. Craiova), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Tătulea D., Tomescu C. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Topleceanu D. C-tin* (Garansebeș), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu) și *Zaharia O. Niculae* (lic. Constanța).

Au mai trimes soluții, d-nii: *Ghișoiu Petre* (lic. Spiru Haret, București).

663.[1] — *Să se rezolve ecuația:*

$$x^4 + p x^3 + q x^2 + r x + s = 0,$$

în caz când între rădăcini există relația:

$$\frac{2 x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{x_3 + x_4}{2},$$

și să afle condiția între coeficienți.

AURELIAN I. STAN

La relațiile cunoscute între rădăcini, alăturăm și relația dată, avem:

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -p \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1 x_2 + x_3 x_4 = q \\ (x_1 + x_2) x_3 x_4 + (x_3 + x_4) x_1 x_2 = -r \\ x_1 x_2 x_3 x_4 = s \\ \dfrac{2 x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \dfrac{x_3 + x_4}{2}. \end{cases}$$

Din ultima relație scoțând:

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 4 x_1 x_2$$

și înlocuind în relația 2ª, găsim:

$$(2)\qquad 5 x_1 x_2 + x_3 x_4 = q.$$

Cum din relația 4:

$$x_3 x_4 = \frac{s}{x_1 x_2},$$

relația (2) devine:

$$5 (x_1 x_2)^2 - q x_1 x_2 + s = 0,$$

de unde:

$$(3)\qquad x_1 x_2 = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 20 s}}{10} = A_i$$

și atunci:

$$(4)\qquad x_3 x_4 = \frac{10 s}{q \pm \sqrt{q^2 - 20 s}} = B_i,$$

$i = 1$ sau 2 după cele două semne înaintea radicalului.

In virtutea relațiilor (3) și (4), relația 3ª și ultimă din (1), devin:

$$A_i (x_1 + x_2) + B_i (x_3 + x_4) = -r$$

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 4 A_i.$$

De aci deducem ușor:

$$x_1 + x_3 = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 16 A_i^2 B_i}}{2 A_i} = C_i,$$

$$x_3 + x_4 = \frac{8 A_i^2}{-r \pm \sqrt{r^2 - 16 A_i^2 B_i}} = D_i.$$

Având suma și produsul rădăcinilor x_1, x_2 și x_3, x_4, formăm ecuațiile:

$$z^2 - C_i z + A_i = 0, \quad z^2 - D_i z + B_i = 0,$$

ale căror rădăcini sunt:

$$x_{1,2} = \frac{C_i \pm \sqrt{C_i^2 - 4 A_i}}{2}, \quad x_{3,4} = \frac{D_i \pm \sqrt{D_i^2 - 4 B_i}}{2}$$

Inlocuind valorile găsite pentru $x_1 + x_2$, $x_3 + x_4$ în prima relație din (1), găsim și relația de condiție:

$$C_i + D_i = -p.$$

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focșani), *Dimitriu Al. Ioan* (lic. Galați), *Iacob Eugen* (Șc. Milit. de Artilerie), *Iliovici G. C-tin, Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Pantu Z. I.* (lic. Lazăr. București), *Popescu C. Virgiliu* (Târgoviște), *Șișu Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați) și *Tudose Tănase* (lic. Câmpina).

666. — *Să se găsească numerile divizibile cu 44 care împărțite cu 38 să dea restul 2 și împărțite prin 17 să dea restul 11.*

TRAIAN T. MARINEANU

1) Enunț rectificat.

Vom căuta întâi numerile N astfel ca:

$$N = 38x + 2 = 17y + 11$$

$$(1) \qquad \therefore \quad 38x - 17y = 9.$$

Să rezolvăm în numere întregi această ecuaţie cu două necunoscute.

Putem scri:

$$y = 2x + \frac{4x - 9}{17}.$$

Pentru ca y să fie întreg, trebuie ca $\frac{4x-9}{17}$ să fie întreg, e suficient să luăm:

$$x = 15, \text{ atunci: } y = 33.$$

Sistemul general de soluţii a ecuaţiei (1) este:

$$x = 15 + 17t, \quad y = 33 - 38t.$$

Atunci:

$$(2) \qquad N = 572 + 646t.$$

Să căutăm acum numerile de forma (2) divizibile cu 44.

Observăm că putem scri:

$$N = 44 \times 13 + 2 \times 323t.$$

Prima parte se divide cu 44, aşa că e suficient să luăm:

$$t = 22a,$$

atunci:

$$N = 44(13 + 323a)$$

unde: $a = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Astfel numerile:

$$572, 14784, 28996\ldots,$$

sunt soluţii ale problemei.

Soluţii date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Climescu C. Al.* (Semin. Pedag., Iaşi), *Dănciulescu Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Ganea Vasile* (ltc. Lazăr, Bucureşti), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Panaite Teodor* (lic. Milit., Iaşi), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu Gh. Ovidiu* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Tudose Tănase* (lic. Câmpina), *Vâlceanu Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vălsănescu V. Viorel* (lic. Piteşti) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

674. — *Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre semnificative, ştiind că numărul format de cifra a doua urmată de cea de a treia şi a patra este egală cu cubul diferenţei dintre ultima cifră şi prima cifră.*

COSNITA CEZAR

Fie $abcde$ patratul cerut. Conform enunţului avem:

$$bcd = (e - a)^3.$$

Cum a e cel puţin 1 şi $e - a \geqq 5$ pentru ca $(e-a)^3$ să fie de trei cifre, rezultă că:

$$e \geqq 6$$

şi cum e este terminaţia unui patrat perfect, n'ar putea fi de cât 6 sau 9.

Dacă luăm $e = 6$, rezultă $a = 1$, iar $bcd = 125$ şi deci $abcde$ ar fi:

$$11256,$$

care nu-i patrat perfect.

Dacă luăm $e = 9$, rezultă $a = 1, 2, 3, 4$, iar $bcd = 512, 343, 216, 125$, şi deci $abcde$ ar putea fi:

$$15129, 23439, 32169, 41259.$$

Dintre aceste numere numai primul este patrat perfect:

$$15129 = 123^2,$$

celelalte nu pot fi, fiind divizibile cu 3 fără a fi şi cu 9.

Singura soluţie este deci, 15129.

Soluţii date de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ), *Antonescu Aurel* (Focşani), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Băcicov Boris* (lic. Tighina), *Băcicov Victor* (lic. Tighina), *Bădescu Amedeu* (lic. Caracal), *Boncea N. Spiridon* (Piteşti), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Bucurescu C. I.* (lic. Odorhei), *Cioclov Gh. Gheorghe* (lic. T.-Severin), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iaşi), *Cristescu C. Ioan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focşani), *Diaconescu H. Aurel* (lic. Milit., Craiova), *Drăguşeanu O.* (lic. Milit., Iaşi), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Gârd I. D-tru* (Dobroteşti), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galaţi), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Drăguţ G. Vasile* (lic. Târgovişte), *Dumitrescu Nicolae* (lic. Timişoara), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Iaşi), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Haim F. L.* (P.-Neamţ), *Hohoi Vasile* (lic. Braşov), *Iacob Şt. Eugen* (Şc. Milit. de Artilerie), *Iancu D.* (lic. Naţional, Iaşi), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Ion* (lic. Caracal), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Mazilescu I. Dolj* (lic. Caracal), *Micula O.* (lic.

Timişoara), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Oighenstein D.* (lic. Bălţi), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iaşi), *Panaitescu C. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pârvulescu M. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Petrovici D-tru* (lic. Câmpina), *Popescu P. Eugen* (T.-Severin), *Popescu Ioan* (Învăţător, Fălticeni), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Procopiescu Şt. Nestor* (Caracal), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Sassu V. Ioan* (lic. Tg.-Mureş), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Scripcă Mihail* (Semin. Pedag., Iaşi), *Scurtu Nicolae* (Braşov), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Simionescu Grigore* (lic. Milit, Craiova), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Streiu Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Tiugan Marin, Tudose C. Tătănase* (lic. Câmpina), *Tiucra Mircea* (lic. Timişoara), *Ungureanu D. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Vâlceanu Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanţa) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

Au mai trimes soluţii, d-nii: *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Saur Ioan* şi *Scurtu Nicolae* (Braşov).

PROBLEME PROPUSE

705. — Să se demonstreze că:

$$(12^{50}+21^{50})(5\cdot 80^{50}-6\cdot 7^{50})+(7^{50}+8^{50})(6\cdot 12^{50}-5\cdot 21^{50})=\text{mult. } 11.$$

CEZAR COSNITA.

706. — Să se calculeze suma:

$$S=11+121+1221+12221+\ldots+122\ldots21.$$

EUGEN ST IACOB

707*. — Fie a şi b distanţele dintre paralelele Δ, Δ_1 şi $\Delta_,$, Δ_2. Dintr'un punct A pe Δ_1 se duce spre Δ_2 o dreaptă AB care face cu Δ_1 unghiul α. In punctul B pe Δ_2 se ridică o perpendiculară pe AB până întâlneşte pe Δ în C, apoi în C se ridică o perpendiculară pe BC, până întâlneşte pe Δ_1 în D. In D se duce o dreaptă care face cu Δ_1 un unghiu 2α şi pe ea se scoboară din A o perpendiculară AE. Să se calculeze lungimea lui AE.

V. ALACI

708[1]* — Se dă cercul, $x^2+y^2=r^2$. In punctele $B(0, r)$ şi $B'(0, -r)$ se duc tangente. Pe tangenta în $B(0, r)$ se ia punctul $A(a, r)$ de unde se duce tangenta AC la cercul dat. Această tangentă întâlneşte tangenta în $B'(0, -r)$ în punctul A'.

1) Această problemă s'a dat la examenul de bacalaureat în Septembrie 1927,

1°. — Să se scrie ecuaţiunile laturilor triunghiului ABC.

2°. Să scrie ecuaţiunile înălţimelor triunghiului ABC şi să se verifice că sunt concurente.

3°. Să se arate că produsul $AB\cdot A'B'=$constant.

4°. Presupunând punctul A mobil pe tangenta BA, să se afle locul geometric al punctului M de intersecţie al coardei BC cu înălţimea din A.

5°. Locul geometric al ortocentrului triunghiului.

Pentru cazul numeric se va lua $r=5$ şi $a=12$.

ION DIMITRIU-ARAD.

709. — Dacă avem numerele α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 şi dacă:

$$\Sigma\alpha_1=\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=0,$$

avem şi relaţiile:

$$\sum\alpha_1^9=\frac{9}{14}\sum\alpha_1^2\cdot\sum\alpha_1^7$$

$$\sum\alpha_1^8=\frac{1}{4}\left(\sum\alpha_1^2\right)^2\cdot\sum\alpha_1^4$$

$$\sum\alpha_1^{11}=\frac{11}{18}\sum\alpha_1^9\cdot\sum\alpha_1^2$$

$$\sum\alpha_1^5\cdot\sum\alpha_1^6=\frac{5}{9}\sum\alpha_1^9\sum\alpha_1^2.$$

EUGEN CRACIUNESCU

710. — Să se stabileaseă identitatea:

$$\sum_{k=4}^{n}\frac{2k+3}{k(k-1)(k-2)}=\frac{2}{3}-\frac{n+1}{n^3-3n^2+2n}.$$

SECAROIU D-TRU

711*. — Fie x', x'' un sistem de soluţii ale ecuaţiunii:

$$a\cos x+b\sin x=c.$$

Să se demonstreze că $\operatorname{tg}(x+x'')$ este independentă de c.

COL. GH. BUICLIU

712. — Să se stabilească identitatea:

$$p^5-\Sigma(p-a)^5=40R^3s\Sigma\sin^2A,$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu oarecare.

ION Z. PANTU

INFORMAȚIUNI

Inscrierile pentru concursul „R. M. T.“, anunțat în No. 9, an. VII, se primesc numai până la 20 Martie 1928. Problemele pentru concurs sunt toate cele ce se vor publica în zece numere consecutive, incepând cu No. 9, an. VII, sub titlu *„Probleme propuse“*.

Rezultatul se va publica, dupăce toate problemele de concurs vor fi rezolvate în cuprinsul revistei.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

— —

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

— —

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

— —

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

Sucursala Timişoara. 15027

ANUL VIII. 15 APRILIE 1928 No. 2

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. P. CAZANACLI. DESPRE NUMERELE LUI BERNOULLI
2. NOTE MATEMATICE, 4, 5, 6, 7.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 629, 660, 664, 665, 669, 670, 675, 677, 692.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Adminstraţia Revistei, şi se poate proucra în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 100 lei
Anul III, broşat, 100 lei
Anul IV, broşat, 100 lei
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.

ANUL VIII — NO. 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1928

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

DESPRE NUMERELE LUI BERNOULLI

de P. CAZANACLI
Student, Iași

In cele ce urmează vreau să propun atenției cititorilor *„Revistei Matematice din Timișoara"*, proprietățile mai importante a unei clase remarcabile de numere așa zise numerele lui *Bernoulli* (Jacques), după *Vallée-Poussin* (Cours d'Analyse, vol. II). Considerăm desfășurarea în seria lui *Mac-Laurin:*

$$(1)\quad \frac{x}{e^x-1}=1+\frac{B_1 x}{1}+\frac{B_2 x^2}{2!}+\ldots+\frac{B_n x^n}{n!}+\ldots$$

Funcția din primul membru este continuă pentru $x=0$, ca și derivatele sale, așa că desfășurarea se poate continua la nesfârșit. Vom admite, pentru a nu îngreuia expunerea, că seria este convergentă într'o anumită vecinătate a lui 0 (anume, se poate demonstra că ea este convergentă în intervalul $0, 2\pi$).

Funcțiunea $\varphi(x)=\frac{x}{e^x-1}$ este așa zisă *funcțiunea generatoare* ale numerelor lui *Bernoulli.* Observăm întâi că:

$$\varphi(x)-\varphi(-x)=\frac{x}{e^x-1}-\frac{-x}{e^{-x}-1}=$$

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x e^x}{1-e^x}=\frac{x(1-e^x)}{e^x-1}=-x.$$

Aceasta arată că nici o putere impară a lui x, afară de puterea întâia, nu poate figura în $\varphi(x)$, căci orice putere impară din $\varphi(x)$ trebue să fie și în $\varphi(x)-\varphi(-x)$. De aici urmează că *toți* B *cu indicile impar afară de* B_1, *sunt nuli.* Vom introduce următoarea notațiune simbolică: convenim să înlocuim B^n prin B_n în desfășurarea lui e^{Bx} în seria de puteri; formula (1) se va putea scri în mod simbolic:

$$(2)\quad \frac{x}{e^x-1}=e^{Bx}.$$

Iată în ce constă utilitatea acestei notațiuni: dacă înmulțim desfășurarea lui e^{Bx} printr'o altă exponențială $e^{\alpha x}$, vom avea în mod simbolic:

$$e^{Bx}\,e^{\alpha x}=e^{(B+\alpha)x}.$$

Cu alte cuvinte, desfășurarea în seria *Mac-Laurin* a funcțiunei din membrul I se face prin formula:

$$\frac{x\,e^{\alpha x}}{e^x-1}=1+\frac{B+\alpha}{1}x+\frac{(B+\alpha)^2}{1.2}x^2+\ldots,$$

cu condiția să dezvoltăm puterile lui $(B+\alpha)$ în membrul al 2-lea și să înlocuim B^n prin B_n. Într'adevăr, membrul al 2-lea al acestei formule este, după regula de înmulțire a seriilor, produsul desfășurărilor lui e^{Bx} și $e^{\alpha x}$. Pe de altă parte, desfășurarea în seria lui *Mac-Laurin* a unui produs de 2 funcțiuni se obține făcând, după aceiași regulă, produsul desfășurărilor factorilor, căci exactitatea coeficienților astfel obținuți rezultă din regula lui *Leibnitz* pentru a deriva un produs. Revenim la ecuația (2). Putem să scăpăm de numitori, tocmai pe baza principiului înmulțirii seriilor lui *Mac-Laurin* mai sus explicat și avem:

$$(3)\quad x=e^{(B+1)x}-e^{Bx}.$$

Prin urmare, egalând coeficienții lui x^n în ambii membri obținem, pentru $n>1$, ecuația simbolică:

$$(4)\quad (B+1)^n-B^n=0.$$

Ea ne dă, pentru $n=2, 3, 4\ldots$ un șir de ecuații recurente cu coeficienții întregi:

$$2B_1+1=0,\quad 3B_2+3B_1+1=0,\ldots$$

cari determină din aproape în aproape pe $B_1, B_2,\ldots$

Deci, *numerele lui Bernoulli sunt raționale.* Știm că toți B cu indicele impar sunt nuli, afară de B_1, care e egal cu $-\frac{1}{2}$. Iar B cu indicele par au ca valoare:

$$B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},$$

$$B_{10}=\frac{5}{66},\ B_{12}=-\frac{691}{2730},\ B_{14}=\frac{7}{6},\ B_{16}=-\frac{3617}{510},$$

$$B_{18}=\frac{43867}{798},\ B_{20}=-\frac{174611}{330},\ B_{22}=\frac{854513}{138},\ldots$$

Observăm că *numerele lui Bernoulli cu indicele par. sunt alternativ pozitive și negative.* Se poate demonstra că aceasta este regula generală.

Câteva proprietăți ale numerelor lui Bernoulli. Inmulțim formula (2) cu e^{yx}; avem:

$$x\,e^{yx}=e^{(B+1+y)x}-e^{(B+y)x},$$

de unde egalând coeficienții lui x^n:

$$n\,y^{n-1}=(B+1+y)^n-(B+1)^n.$$

Această relație arată că identitatea:

$$(6)\qquad f(y+B+1)-f(y+B)=f'(y),$$

are loc pentru fiecare termen al unui polinom $f(y)$, ea are loc deci, pentru polinomul însuși și aceasta este identitatea fundamentală căreia îi satisfac numerele lui *Bernoulli.* Formula (6) se poate extinde și la alte funcțiuni, decât polinoame. De exemplu, dacă $f(y)$ este o serie de puteri convergentă, $\Sigma a_n y^n$ și dacă seriile $\Sigma a_n(y+B+1)^n$ și $\Sigma a_n(y+B)^n$ sunt convergente, formula (6) va avea sens și va fi exactă. Iată câteva cazuri particulare:

1) Facem în (5), $y=-\frac{1}{2}$, atunci:

$$\left(B+\frac{1}{2}\right)^n-\left(B-\frac{1}{2}\right)^n=n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Făcând succesiv $n=2,\ 4,\ldots$ această formulă permite să verificăm, că toți B cu indicele impar sunt nuli începând cu B_3.

2) Fie:

$$f(y)=y(y+1)(y+2)\ldots(y+p).$$

Formula (6) dă pentru $y=0$:

$$(p+1)(B+1)(B+2)\ldots(B+p)=p!$$

în mod simbolic, înlocuind B^n prin B_n.

3) Fie $1\leq q\leq p$; punem:

$$f(y)=(y-1)^p\,y^q,$$

avem pentnu $y=0$:

$$B^p(B+1)^q-B^q(B-1)^p=0,$$

întrebuințând tot notația simbolică cunoscută. Această formă. datorită lui *Stern,* conține numerile cu indicii cuprinși între q și $p+q$. Ea e, poate cea mai comodă pentru calculul numerilor lui *Bernoulli.* In articolul viitor voi vorbi despre *polinoamele* lui *Bernoulli,* cari sunt într'o legătură foarte strânsă cu numerile lui *Bernoulli* și se bucură și ele de multe proprietăți interesante.

NOTE MATEMATICE

4. — *Asupra problemei No. 142.*

Soluția dată acestei probleme nu este complectă de oarece conduce la o singură soluțiune, dar fără să se demonstreze că nu mai sunt și altele. Astfel dacă în egalitatea:

$$a^{\alpha-1}\,.\,b^{\beta-1}\,.\,c^{\gamma-1}\ldots(a-1)(b-1)(c-1)\ldots$$
$$=2^6\times3^4\times7\times13,$$

s'ar face toate supozițiunile posibile și mai ales pentru factorii primi de forma (2^n+1), atunci — în afară de soluția dată problemei — s'ar mai găsi soluțiunile:

$$N=3^2\,.\,5\,.\,7^2\,.\,13^2=4965945$$

și

$$N=2\,.\,3^2\,.\,5\,.\,7^2\,.\,13^2=9931890.$$

CAP. I. LINTES

5. — *Rezolvarea unei ecuații în numere întregi.*

Propunându-mi să rezolv în numere întregi ecuația:

$$a\,x^2+b\,y^2+c\,x+d\,y=f,$$

ai cărei coeficienţi sunt tot întregi, vom avea:

$$x = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4a(by^2 + dy - f)}}{2a},$$

şi prin urmare:

$$by^2 + dy - f = am; \quad c = 2an,$$

de unde:

$$y = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4b(f + am)}}{2b},$$

deci:

$$d = 2bq \quad \text{şi} \quad f + am = bp.$$

Aşa dar:

$$\begin{cases} x = -n \pm \sqrt{n^2 - m} \\ y = -q \pm \sqrt{q^2 + p} \end{cases}$$

Pentru:

$$a = a, \quad b = b, \quad c = 2an, \quad d = 2bq,$$

şi: $$f = bp - am.$$

Punând apoi condiţia ca:

$$n^2 - m = A^2 \quad \text{şi} \quad q^2 + p = B^2,$$

obţinem:

$$\begin{matrix} n = \alpha + \beta \\ m = 2\alpha\beta \end{matrix} \quad \text{şi} \quad \begin{matrix} q = \gamma - \delta \\ p = 2\gamma\delta. \end{matrix}$$

Şi în acest caz:

$$\begin{cases} x = -(\alpha + \beta) \pm (\alpha - \beta) \\ y = -(\gamma - \delta) \pm (\gamma + \delta). \end{cases}$$

Pentru:

$$a = a, \quad b = b, \quad c = 2a(\alpha + \beta)$$

$$d = 2b(\gamma - \delta) \quad \text{şi} \quad f = 2b\gamma\delta - 2a\alpha\beta.$$

Soluţiuni cari satisfac ecuaţiei, dar în condiţiuni impuse pentru coeficienţii e, d şi f; altfel ecuaţia nu este posibilă:

CAP. I. LINTES

6. — *Asupra unor ecuaţii.*

Imi propun să arăt cum se pot rezolva uşor unele ecuaţii de gradul IV.

Fie ecuaţiile:

(1) $a^2x^4 \pm 2abx^3 + (b^2 + ac)x^2 \pm bcx \pm d = 0$

(2) $a^2x^4 \pm 2abx^3 + (b^2 + ad \pm 2ac)x^2 + b(2c \pm d)x \pm d \pm e = 0$

(3) $ax^6 \pm 2ax^4\sqrt{x} + (a + b)x^3 \pm bx\sqrt{x} \pm c = 0,$

care se pot pune respectiv sub formele:

(4) $(ax^2 \pm bx)^2 + c(ax^2 \pm bx) \pm d = 0$

(5) $(ax^2 \pm bx \pm c)^2 + d(ax^2 \pm bx \pm c) \pm e = 0$

(6) $a(x^3 \pm x\sqrt{x})^2 + b(x^3 \pm x\sqrt{x}) \pm c = 0.$

Ecuaţiile (4), (5), (6) sunt ecuaţii de gradul II, în:

$$(ax^2 + bx), \ (ax^2 \pm bx \pm c) \text{ şi } (x^3 \pm x\sqrt{x}),$$

ce se pot uşor rezolva.

Considerând ecuaţiile (2) şi (3) sub forma:

$$a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + ad + 2ac)x^2 + b(2c + d)x + d + e = 0$$

$$ax^6 - 2ax^4\sqrt{x} + (a + b)x^3 - bx\sqrt{x} - c = 0,$$

unde dacă luăm în prima $a = 1$, $b = c = d = -1$ şi $e = 2$, iar în a doua $a = b = 1$ găsim:

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

(Pr. No. 145, rezol. R. M. T., pag. 55, vol. II).

$$\therefore (x^2 - x - 1)^2 - (x^2 - x - 1) - 1 = 0,$$

şi:

$$x^6 - 2x^4\sqrt{x} + 2x^3 - x\sqrt{x} - c = 0,$$

(Pr. No. 552, rezol. R. M. T., pag. 124, vol. VI)

$$\therefore (x^3 - x\sqrt{x})^2 + (x^3 - x\sqrt{x}) - c = 0.$$

Fie încă ecuaţiile:

(7) $a^2x^4 + acx^3 + (2ab + d)x^2 + b^2 = 0$

(8) $a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac + ad + b)x^2 + (2c + d)bx + c(d + c) = 0,$

care se mai pot scri:

(9) $(ax^2 + b)^2 + cx(ax^2 + b) + dx^2 = 0$

(10) $(ax^2 + bx + c)^2 + dx(ax^2 + bx + c) + ex^2 = 0,$

sau încă:

$$(11)\qquad \frac{a x^2+b}{x}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4d}}{2}$$

$$(12)\qquad \frac{a x^2+b x+c}{x}=\frac{-d\pm\sqrt{d^2-4e}}{2},$$

ecuații de gradul II.

Dacă în ecuațiile (1), (2), (3), (7) și (8) dăm diferite valori coeficienților a, b, c, d, e, vom căpăta diferite ecuații de genul acesta, care se pot rezolva punându-le sub una din formele (4), (5), (6), (9) și (10).

EUGEN ST. IACOB
Șc. Militară de Artilerie

7. — *Asupra problemei 560, din R. M.T., vol. VI*, rezolvată la pag. 156, același volum. In cele ce urmează voi da altă soluție acestei probleme.

Fie ecuația:

$$x^2-2ax+4b=0,$$

cu rădăcinele:

$$x_1=a+\sqrt{a^2-4b};\quad x_2=a-\sqrt{a^2-4b},$$

și ecuația:

$$x^2-2bx+4a=0$$

cu rădăcinile:

$$x'=b+\sqrt{b^2-4a};\quad x''=b-\sqrt{b^2-4a}.$$

Ținând seama de valorile lui x_1, x_2, x', x'', avem:

$$(1)\quad x_1x'x_2x''=[ab+\sqrt{(a^2-4b)(b^2-4a)}+a\sqrt{b^2-4a}+b\sqrt{a^2-4b}]\times$$

$$[ab+\sqrt{(a^2-4b)(b^2-4a)}-a\sqrt{b^2-4a}-b\sqrt{a^2-4b}]=$$

$$[ab+\sqrt{(a^2-4b)(b^2-4a)}]^2-[a\sqrt{b^2-4a}+b\sqrt{a^2-4b}]^2$$

Insă: $x_1x_2=4b$ și $x'x''=4a$, deci:

$$x_1x'x_2x''=16ab,$$

așa că (1), devine:

$$16ab=[ab+\sqrt{(a^2-4b)(b^2-4a)}]^2-$$

$$(a\sqrt{b^2-4a}+b\sqrt{a^2-4b})^2,$$

care e tocmai identitatea care face subiectul problemei 560.

Metoda de mai sus ne dă posibilitatea de a stabili multe identități iraționale interesante.

NICOLAE O. ZAHARIA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIII, No, 7, Martie 1928. Quadrilatère inscriptible et octaèdre harmonique, *V. Thébaut*. Sur les points equiparalléles, *N. Agronomof*. Aviația matematică, Căpitan *I. Linteș*.

PROBLEME REZOLVATE

629. — *Să se rezolve ecuația:*

$$27x^{10}-18x^7\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}=a.$$

VIRGIL GR. DANCIULESCU.

Ecuația propusă se mai poate scri:

$$3(3x^5-x^2\sqrt{x})^2-(3x^5-x^2\sqrt{x})-a=0,$$

care este o ecuație de gradul al 2^{lea} în $3x^5-x^2\sqrt{x}$, rezultă deci:

$$3x^5-x^2\sqrt{x}=\frac{1\pm\sqrt{1+12a}}{6},$$

sau:

$$3(x^2\sqrt{x})^2-x^2\sqrt{x}-\frac{1\pm\sqrt{1+12a}}{6}=0,$$

$$\therefore\quad x^2\sqrt{x}=\frac{1\pm\sqrt{1+2\pm2\sqrt{1+12a}}}{6}=A_i,$$

$i=1, 2, 3, 4$, după cele patru valori ce le are primul membru.

Ridicând la patrat avem:

$$x^5-A_i^2=0,$$

de unde deducem:

$$x=\sqrt[5]{A_i^2}\left(\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\right),$$

$$k=0,\ 1\ 2,\ 3,\ 4.$$

Soluție dată de d-nii: *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Hohoi Vasile* (lic. Brașov), *Iacob Șt. Eugen* (Șc. Milit. de Artilerie), *Iliovici D. C-tin*, *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Pauțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Popescu C. Virgiliu* (student, București), *Scurtu A. Nicolae* (lic. Brașov), *Sîrchis Iosif* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

Generalizare dată de d-l *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați).

Să se rezolve ecuația:

$$m^2 p\, x^{4r} - 2mnp\, x^{3r} + (n^2 p - mq)\, x^{2r} + nq\, x^r = a.$$

Punem, $x^r = z$, avem:

$$m^2 p\, z^4 - 2mnp\, z^3 + (n^2 p - mq)\, z^2 - nq\, z = a,$$

sau:

$$mx^2 (mpz^2 - npz - q) - nz(mpz^2 - npz - q) = a$$

$$\therefore \quad (mz^2 - nz)(mpz^2 - npz - q) = 0.$$

Dacă notăm:

$$mz^2 - nz = y,$$

avem:

$$y(py - q) = a,$$

sau:

$$py^2 - qy - a = 0,$$

deci:

$$y = mz^2 - nz = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4pa}}{2p},$$

de unde:

$$2mpz^2 - 2npz - q \mp \sqrt{q^2 + 4pa} = 0$$

$$\therefore \quad z = x^r = \frac{np \pm \sqrt{n^2 p^2 \pm 2mp(q \pm \sqrt{q^2 + 4ap})}}{2mp}$$

deci:

$$x = \sqrt[r]{\frac{np \pm 2mp(q \pm \sqrt{q^2 + 4ap})}{2mp}} \times$$

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{r} + i\sin\frac{2k\pi}{r}\right), \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots r-1.$$

Pentru cazul particular: $m = p = 3$, $n = q = 1$, $r = \frac{5}{2}$, avem problema propusă; iar pentru $m = p = q = 1$, $n = -1$, $r = 1$, avem exercițiul 86 din „G. M.“, an. XXXII, p. 318.

D-l *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța), a generalizat problema astfel.

Să se rezolve ecuația:

$$27x^{2(2m+1)} - 18x^{3m+1}\sqrt{x} + x^m\sqrt{x} = a.$$

Soluția ca la primul caz:

660. — *Între elementele obicinuite ale unui triunghiu, avem relația:*

$$3\begin{vmatrix} a & \frac{1}{r_a} & \frac{1}{h_a} \\ b & \frac{1}{r_b} & \frac{1}{h_b} \\ c & \frac{1}{r_c} & \frac{1}{h_c} \end{vmatrix} + \frac{1}{r}\begin{vmatrix} 1 & a & \frac{1}{h_a} \\ 1 & b & \frac{1}{h_b} \\ 1 & c & \frac{1}{h_c} \end{vmatrix} + \frac{1}{r}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{r_a} & a \\ 1 & \frac{1}{r_b} & b \\ 1 & \frac{1}{r_c} & c \end{vmatrix} = 0.$$

COSTACHESCU V. C-TIN

Dacă folosim relațiile cunoscute:

$$(1) \qquad \begin{aligned} r_a &= \frac{s}{p-a}, \quad r_b = \frac{s}{p-b}, \quad r_c = \frac{s}{p-c} \\ h_a &= \frac{2s}{a}, \quad h_b = \frac{2s}{b}, \quad h_c = \frac{2s}{c}, \end{aligned}$$

și notând cu E primul membru, putem scri succesiv:

$$E = 3\begin{vmatrix} a & \frac{p-a}{s} & \frac{a}{2s} \\ b & \frac{p-b}{s} & \frac{b}{2s} \\ c & \frac{p-c}{s} & \frac{c}{2s} \end{vmatrix} + \frac{1}{r}\begin{vmatrix} 1 & a & \frac{a}{2s} \\ 1 & b & \frac{b}{2s} \\ 1 & c & \frac{c}{-2s} \end{vmatrix} +$$

$$\frac{1}{r}\begin{vmatrix} 1 & \frac{p-a}{s} & a \\ 1 & \frac{p-b}{s} & b \\ 1 & \frac{p-c}{s} & c \end{vmatrix} = \frac{3}{2s^2}\begin{vmatrix} a & p-a & a \\ b & p-b & b \\ c & p & c \end{vmatrix} +$$

$$\frac{1}{2rs}\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & b & b \\ 1 & c & c \end{vmatrix} + \frac{1}{rs}\begin{vmatrix} 1 & p-a & a \\ 1 & p-b & b \\ 1 & p-c & c \end{vmatrix}.$$

Primii doi determinanți sunt nuli ca având câte două coloane egale, iar al treilea determinant înlocuind coloana 2-a prin suma între ea și a treia și apoi scoțând p factor, găsim un determinant cu două coloane egale și deci e zero, rezultă:

$$E = 0,$$

și relația cerută este astfel stabilită.

Soluție dată de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Avramescu Th. Ion* (lic. Carol, Craiova), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Boncea Spiridon* (lic. Pitești), *Bucurescu Ionel* (lic. Odorhei), *Cernăuți I.* (lic. Timișoara), *Cocârlan Pavel* (lic. Timișoara), *Craiu N. Ion* (lic. Pitești), *Crăciunescu E. Argentoaia*, *Dăscălescu St. Hristache* (lic. Focșani), *Dobromirescu P.* (Caracal), *Dumitrescu Neculai* (lic. Timișoara), *Floareș I. Mircea* (lic. Bacău), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Gheorghiev Nicolae* (Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Hohoi Vasile*, *Iacob Șt. Eugen* (Șc. Milit., Timișoara), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Marineanu T. Traian* (Șc. Polit., Timișoara), *Micula O.* (lic. Timișoara), *Neacșu Vasile* (Șc. Polit., Timișoara), *Panaite N. Theodor* (lic. Milit., Iași), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Podariu Alexandru* (P.-Neamț), *Pleșoiu P.*, *Popescu P. Eugen* (lic. Traian), *Popescu Șt. Toma* (lic. Pitești), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Rusmănică Ioan* (lic. Brașov), *Saur A. Ioan* (lic. Arad), *Savin Arnold* (lic. Focșani), *Scarlat V. D.* (lic. Câmpina), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iași), *Scurtu A. Nicolae* (lic. Brașov), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Slicaru* C. (lic. Național, Iași), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați), *Tătulea Dionisie*, *Teodorescu Aurel* (lic. R.-Sărat), *Tudose Tănase* (lic. Câmpina), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Șc. Polit., Leoben-Austria), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ion*, *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

S'au mai primit soluții dela d-nii: *Ghișoiu Petre* (lic. Matei Basarab, București) și *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași).

Soluția 2-a. Vom folosi următoarea teoremă (R. M. T., an. V, p. 22). Dacă într'un determinant oarecare de ordinul m înlocuim elementele unei coloane prin niște numere arbitrare, apoi înmulțim determinantul cu suma elementelor scoase și facem această operație pentru fiecare coloană, atunci suma produselor astfel obținute, este egală cu suma numerelor arbitrare, înmulțită cu determinantul dat.

Aplicând această teoremă determinantului de ordinul al 3-lea:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{r_a} & \frac{1}{h_a} \\ 1 & \frac{1}{r_b} & \frac{1}{h_b} \\ 1 & \frac{1}{r_c} & \frac{1}{h_c} \end{vmatrix},$$

luând ca numere arbitrare pe a, b, c și observând că:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{s}+\frac{p-b}{s}+\frac{p-a}{s}=\frac{p}{s}=\frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2s}+\frac{b}{2s}+\frac{c}{2s}=\frac{p}{s}=\frac{1}{r},$$

putem scri:

$$3\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{r_a} & \frac{1}{h_a} \\ 1 & \frac{1}{r_b} & \frac{1}{h_b} \\ 1 & \frac{1}{r_c} & \frac{1}{h_c} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & a & \frac{1}{h_c} \\ 1 & b & \frac{1}{h_b} \\ 1 & c & \frac{1}{h_c} \end{vmatrix} + \frac{1}{r}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{r_a} & a \\ 1 & \frac{1}{r_b} & b \\ 1 & \frac{1}{r_c} & c \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{r_a} & \frac{1}{h_a} \\ 1 & \frac{1}{r_b} & \frac{1}{h_b} \\ 1 & \frac{1}{r_c} & \frac{1}{h_c} \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{r_a} & \frac{1}{h_a} \\ 1 & \frac{1}{r_b} & \frac{1}{h_b} \\ 1 & \frac{1}{r_c} & \frac{1}{h_c} \end{vmatrix}$$

Dar membrul al 2-lea este zero, căci:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{r_a} & \frac{1}{h_a} \\ 1 & \frac{1}{r_b} & \frac{1}{h_b} \\ 1 & \frac{1}{r_c} & \frac{1}{h_c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{p-a}{s} & \frac{a}{2s} \\ 1 & \frac{p-b}{s} & \frac{b}{2s} \\ 1 & \frac{p-c}{s} & \frac{c}{2s} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{2s^2}\begin{vmatrix} 1 & p-a & a \\ 1 & p-b & b \\ 1 & p-c & c \end{vmatrix} = \frac{p}{2s^2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = 1.$$

Relația cerută este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Balaban I. Gheorghe* (lic. Bârlad), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Bratosin Radu* (lic. Brașov), *Crăciunescu I.*, *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dinu S. D-tru* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Nițulescu Victor* (lic. Caracal), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pavel St. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Popovici M.* (Focșani). *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași)

664. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\frac{\sin 7t}{\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cos 3t}=$$

$$2^4 \sin t\left(\cos t-\cos\frac{\pi}{7}\right)\left(\cos t-\cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(\cos t-\cos\frac{5\pi}{7}\right).$$

V. ALACI

Considerăm formulele de transformare din (R. M. T.), an. VII, No. 9, pag. 140).

$$(1)\qquad \sin nt=2^{n-1}\sin t\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos t-\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$(2)\qquad \frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt=$$

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

Facem în (1), $n=7$ și în (2), $n=3$, avem:

$$(3)\qquad \sin 7t=2^6\sin t\left(\cos t-\cos\frac{\pi}{7}\right)\times$$

$$\left(\cos t-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(\cos t-\cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(\cos t-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\times$$

$$\left(\cos t-\cos\frac{5\pi}{7}\right)\left(\cos t-\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$(4)\qquad \frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cos 3t=$$

$$2^2\left(\cos t-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(\cos t-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(\cos t-\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

Impărțim relațiile (3) și (4) obținem:

$$\frac{\sin 7t}{\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cos 3t}=$$

$$2^4\sin t\left(\cos t-\cos\frac{\pi}{7}\right)\left(\cos t-\cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(\cos t-\cos\frac{5\pi}{7}\right),$$

tocmai identitatea cerută.

Soluții date de d-nii: *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Bratoșin Radu* (lic. Brașov), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Cioclov Gh. Gheorghe* (T.-Severin), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iași), *Craiu N. Ion* (Caransebeș), *Demetrescu N. August* (lic. Lazăr, București), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dobromirescu P.* (Caracal), *Gheorghe M hai* (lic. Milit., Iași), *Gheorghe Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Ghișoiu Petre* (lic. Spiru-Haret, București), *Iacob St. Eugen* (Șc. Milit. de Artilerie), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Ionescu Țiu D. C-tin* (lic. Milit, Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Micula O.* (lic. Timișoara), *Morțun A. C-tin* (Semin. Pedag., Iași), *Panaite T. Theodor* (lic. Milit., Iași), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), *Popescu Gh. Ovidiu* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Râmniceanu I. Cristian* (lic Milit., Iași), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Scripcă Mihai* (Semn. Pedag., Iași), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța).

Generallzare. D-nii *Saur Ioan* (lic. Arad) și *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), au stabilit mai general, identitatea:

$$\frac{\sin(2n+1)t}{\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos nt}=$$

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left[\cos t-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right]$$

665. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\end{vmatrix}=8pR\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{C-B}{2},$$

α, β, γ fiind segmentele cuprinse între vârfuri și ortocentru, iar α', β', γ' fiind segmentete cuprinse între ortocentru și laturi.

COSTACHESCU V. C-TIN

Folosim relațiile cunoscute, (Compléments de Trigonométrie, par F. G. M., pag. 183).

$$\alpha=2R\cos A \qquad \alpha'=2R\cos B\cos C$$

$$\beta=2R\cos B \qquad \beta'=2R\cos A\cos C$$

$$\gamma=2R\cos C \qquad \gamma'=2R\cos A\cos B,$$

atunci primul membru al relației cerute pe care să'l notăm cu D, devine:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2R\cos A & 2R\cos B & 2R\cos C \\ 2R\cos B\cos C & 2R\cos A\cos C & 2R\cos A\cos B \end{vmatrix} =$$

$$4R^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos A & \cos B-\cos A & \cos C-\cos B \\ \cos B\cos C & \cos C(\cos A-\cos B) & \cos A(\cos B-\cos C) \end{vmatrix}$$

$$=4R^2(\cos A-\cos B)(\cos B-\cos C)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \cos C & \cos A \end{vmatrix}$$

$$=4R^2(\cos A-\cos B)(\cos B-\cos C)(\cos C-\cos A).$$

Transformând în produse diferenţele de cosini, avem:

$$D=32R^2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{B+C}{2}\times$$

$$\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{A-C}{2}=$$

$$32R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A-C}{2}\times$$

$$\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{C-B}{2}.$$

Cum însă:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}$$ (F. G. M., pag. 174),

putem scri:

$$D=8pR\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{C-B}{2},$$

tocmai identitatea cerută:

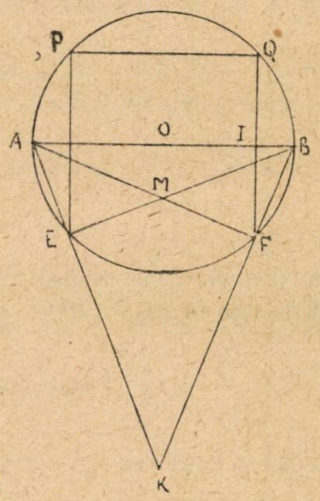
Soluţii date de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ)' *Bratosin Radu* (lic. Braşov), *Coşniţă Cezar* (lic. Bârlad)' *Dăscălescu Hristache* (lic. Focşani), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galaţi), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Morţun A. C-tin* (Semin. Pedag., Iaşi), *Panţu Z. Ioan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu St. Toma* (lic. Piteşti), *Popovici M.* (Focşani), *Savin Arnold* (lic. Focşani), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Vâlceann N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

669. — *Se dă un cerc de diametru* AB = *a. Se duce o coardă* PQ *paralelă la* AB *şi egală cu latura patratului înscris în cerc. Fie* E, F *simetricele lui* P, Q *în raport cu* AB. *Coardele* AE *şi* BF *se taie în* K, *iar* AF *şi* BE *în* M. *Să se demonstreze că:*

1°. *Patrulaterul* FKEM *este inscriptibil şi să se calculeze unghiul* AMB.

2°. $BE=\frac{a}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $BF=\frac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$,

ŞTEFAN ST. STEBLEA



1° Patrulaterul FKEM este inscriptibil, având unghiurile opuse din E şi F drepte, suplimentele lor $\sphericalangle BEA$ şi $\sphericalangle AFB$ fiind înscrise în câte o o jumătate de cerc.

Apoi observăm, că:

$$\text{măs.}\overset{\frown}{AMB}=\frac{\text{măs.}\overset{\frown}{APQB}+\text{măs}\overset{\frown}{EF}}{2}=\frac{180^\circ+90^\circ}{2}$$

$$\therefore\quad \overset{\frown}{AMB}=135^\circ.$$

2°. In triunghiul dreptunghic AFB, scrim că o catetă este medie proporţională între ipotenuză şi proecţia sa pe ipotenuză, avem:

(1) $\overline{AF}^2=AB.AI,\quad \overline{BF}^2=AB.IB.$

Dar:

$$AB=a,\quad AI=AO+OI=a+$$

$$\frac{PQ}{2}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2\sqrt{2}}=\frac{a}{4}(2+\sqrt{2})$$

$$IB=a-AI=a-\frac{a}{4}(2+\sqrt{2})=\frac{a}{4}(2-\sqrt{2})$$

Inlocuind în (1) şi observând că $AF = BE$, avem:

$$\overline{BE}^2 = \frac{a^2}{4}(2+\sqrt{2}),\quad \overline{BF}^2 = \frac{a^2}{4}(2-\sqrt{2})$$

$$\therefore\ BE = \frac{a}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},\quad BF = \frac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

Observare. BF şi BE sunt laturile octagonului regulat şi a octagonului regulat stelat înscris în cercul dat.

Soluţii date de d-nii: *Aldea N.* (lic. M-rea Dealu), *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Băncilă Gh.* (lic. Cluj), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Coşniţă Cezar* (lic. Bârlad), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Craiu N. Ion* (lic. Caransebeş), *Dăscălescu St. Hristache* (lic. Focşani), *Dobromirescu P.*, *Drăguşeanu Octavian* (lic. Milit., Iaşi), *Drăguţ G. Vasile* (lic. Târgovişte), *Dinu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Ghisoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Hohoi V.* (lic. Braşov), *Iliescu Petre* (lic. Bolgrad), *Iliovici G. C-tin*, *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Gheorghe*, *Ionescu Ion* (lic. Caracal), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Magda Ovidiu* (lic. Cluj), *Mazilescu I. Dolj* (lic. Caracal), *Mălăescu Traian* (lic. Arad), *Mărăşescu Ioan* (Şc. de Conductori, Cluj), *Micula O.* (lic. Timişoara), *Mihuţ Metodie* (lic. Caransebeş), *Mocuţă T. Traian* (lic. Arad), *Morţun A. C-tin* (Semin. Pedag., Iaşi), *Nazim Seid-Hilmi* (lic. Cluj), *Neacşu Vasile* (Şc. Polit., Timişoara), *Panait N. Theodor* (lic. Milit., Iaşi), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Paşca Ioan* (Şc. de Conductori, Cluj), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu C. Virgiliu* (student, Bucureşti), *Popescu O. Ion* (Calafat), *Popescu D. Nicolae* (lic. Calafat), *Popovici M.* (Focşani), *Procopiescu St. Nestor* (Caracal), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Savin Arnold* (lic. Focşani), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iaşi), *Scurtu A. Nicolae* (lic. Braşov), *Simionescu Grigore* (lic. Milit., Craiova), *Şişu Gheorghe* (Şc. Polit, Timişoara), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Tomescu Valeriu* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Topliceanu C. C-tin* (Caransebeş), *Tudose Tănase* (lic. Câmpina), *Ţiucra Mircea* (lic. Timişoara), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vâlsănescu V. Viorel* (lic. Piteşti), *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu), *Zaharia O. Ioan* (lic. Constanţa) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

S'au mai primit soluţii dela d-nii: *Demetrescu N. August* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galaţi), *Engelmann Anton* (Caransebeş), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Gheorghiev N.* şi *Zaharie O. Nicolae* (lic. Timişoara).

670 — *Să se descompună în factori liniari, expresiunea:*

$$\sum (x^2+1)(y-z)(1-x).$$

CEZAR COSNITA

Putem scri:

$$\sum (x^2+1)(y-z)(1-x) = (x^2+1)(1-x)y + (y^2+1)(1-y)z + (z^2+1)(1-z)x - (x^2+1)(1-x)z - (y^2+1)(1-y)x - (z^2+1)(1-z)y.$$

Observăm că al doilea membru se poate scri sub formă de determinant, avem anume:

$$\sum (x^2+1)(y-z)(1-x) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ (x^2+1)(1-x) & (y^2+1)(1-y) & (z^2+1)(1-z) \end{vmatrix}$$

Efectuând înmulţirile în ultima linie, apoi adunându-i linia a doua şi scăzându-i prima şi ţinând seamă de unele proprietăţi ale determinanţilor, putem scri succesiv:

$$\sum (x^2+1)(y-z)(1-x) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ -x^3+x^2 & -y^3+y^2 & -z^3+z^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^3-x^3 & z^3-x^3 \end{vmatrix} - (y-x)(z-x)(z-y) =$$

$$(y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y^2+xy+x^2 & z^2+zx+x^2 \end{vmatrix} -$$

$$(y-x)(z-x)(z-y) = (y-x)(z-x)(z^2-y^2+zx-xy$$

$$-(y-x)(z-x)(z-y) = (y-x)(z-x)(z-y)(z+y+x)$$

$$-(y-x)(z-x)(z-y).$$

De aci deducem:

$$\sum (x^2+1)(y-z)(1-x) =$$

$$(y-x)(z-x)(z-y)(x+y+z-1),$$

şi expresia dată este descompusă în factori liniari.

Soluții date de d-nii: *Cernuți Iosif* (lic. Timișoara), *Cioclov Gheorghe* (lic. T.-Severin), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit. Iași), *Micula O.* (lic. Timișoara), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Popescu P- Eugen* (lic. T.-Severin), *Popovici M.* (Focșani), *Roman. I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Sirchis I.* (lic. Tighina).

675. — *Să se verifice inegalitatea:*

$$\frac{(a+c)[4b^2+(a+c)^2]}{abc} \geqq 16,$$

a, b, c fiind numere reale și positive.

C. D. IONESCU-ȚIU

Dacă x, y sunt numere pozitive, avem evident:

$$(x-y)^2 \geqq 0$$

$$\therefore \quad x^2+y^2 \geqq 2xy \quad \text{sau:} \quad (1) \quad \frac{x^2+y^2}{xy} \geqq 2.$$

Dacă punem:

$$x = 2b, \quad y = a+c,$$

relațiunea (1) devine:

$$(2) \qquad \frac{4b^2+(a+c)^2}{2b(a+c)} \geqq 2.$$

De altă parte, avem evident:

$$(a-c)^2 \geqq 2,$$

și adunând $4ac$ la ambii membrii, avem:

$$a^2+2ac+c^2 \geqq 4ac$$

$$(3) \qquad \therefore \quad \frac{(a+c)^2}{ac} \geqq 4.$$

Multiplicând ambii membrii ai relațiilor (2) și (3), obținem:

$$\frac{(a+c)^2}{ac} \cdot \frac{4b^2+(a+c)^2}{b(a+c)} \geqq 16$$

$$\therefore \quad \frac{(a+c)[4b^2+(a+c)^2]}{abc} \geqq 16,$$

avem tocmai relația cerută.

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Antonescu Aurel* (lic. Focșani), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Cernăuți I.* (lic. Timișoara), *Climescu C. Al.* (Semin. Pedag., Iași), *Drăgușeanu Octav* (lic. Milit., Iași), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați), *Hohoi Vasile* (lic. Brașov), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Iacob Șt. Eugen* (Șc. Milit., de Artilerie), *Ionescu M. Haralambie* (C. de Argeș), *Mărăroiu I.* (lic. Brașov), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iași), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), *Râmnicearu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman P. I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sassu V. Ioan* (lic. Tg.-Mureș), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Scurtu A. Nicolae* (lic. Brașov), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Sprinceană Ghcorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Streit Victor* (lic. Internat, Iași), *Ungureanu D. Gheorghe* (lic. Câmpina) și *Vâlsănescu Viorel* (lic. Pitești).

S'au mai primit soluții dela d-nii: *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Ghișoiu Petre* (lic. Spiru Haret, București) și *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova).

677*. — *Să se găsească soluțiile întregi ale ecuației:*

$$2x^2-3y^2=5.$$

GH. CONSTANTINESCU

Soluții date de d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), și *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați).

Folosim metoda lui *Lagrange*, (Oeuvres, Tome VII, pag. 118 și următoarele).

In ecuația dată, efectuăm întâi substituția:

$$(1) \qquad x = ay - 5z,$$

cu scop de a reduce la 1 termenul liber, avem:

$$(2a^2-3)y^2 - 20ayz + 50z^2 = 5$$

$$\therefore \quad \frac{2a^2-3}{5}y^2 - 4ayz + 10z^2 = 1$$

Luând $a=2$ (cea mai mică valoare) coeficientul lui y devine întreg și avem:

$$(2) \qquad y^2 - 8yz + 10z^2 = 1.$$

Facem acum substituția:

$$(3) \qquad y = kz + t,$$

unde vom determina pe k, astfel ca termenul în zt, în noua ecuație să dispară. Efectuând deci în (2) substituția (3), avem:

$$(4) \quad (k^2-8k+10)z^2 + (2k-8)tz + t^2 = 1,$$

și pentru ca să dispară termenul în tz, luăm $k=4$, atunci (4) devine:

$$(5) \qquad t^2 - 6z^2 = 1.$$

O soluție particulară a ecuației (5), este:

$$t_1 = 5, \quad z_1 = 2.$$

Căci:

$$t_1^2 - 6 z_1^2 = 25 - 24 = 1.$$

Dar cum avem evident:

$$25 - 24 = (5 + 2\sqrt{6})^n (5 - 2\sqrt{6})^n = 1,$$

n fiind întreg, rezultă că (5) se poate scri:

$$(t + \sqrt{6}\, z)(t - \sqrt{6}\, z) = (5 + 2\sqrt{6})^n (5 - 2\sqrt{6})^n,$$

și atunci putem lua:

$$\begin{cases} t + \sqrt{6}\, z = (5 + 2\sqrt{6})^n \\ t \quad \sqrt{6}\, z = (5 - 2\sqrt{6})^n \end{cases}$$

De aci, deducem:

$$(6) \qquad \begin{cases} t = \dfrac{(5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n}{2} \\ z = \dfrac{(5 + 2\sqrt{6})^n - (5 - 2\sqrt{6})^n}{2\sqrt{6}} \end{cases}$$

Acestea sunt valorile cele mai generale ale lui t și z care verifică ecuația (5), valori care evident sunt numere întregi, iraționalitatea dispărând după efectuarea calculelor.

Ținând seamă de substituția (3), în care $k = 4$, și de substituția (1) în care $a = 2$, găsim:

$$\begin{cases} x = 3z + 2t \\ y = 4z + t. \end{cases}$$

Ținând seamă și de (6), găsim că soluția cea mai generală a ecuației date este:

$$\begin{cases} x = \dfrac{(3 + 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})^n - (3 - 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})^n}{2\sqrt{6}} \\ y = \dfrac{(4 + \sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})^n - (4 - \sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})^n}{2\sqrt{6}}. \end{cases}$$

In particular pentru $n = 0, 1, 2 \ldots$ obținem soluțiile:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 16 \\ y = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 158 \\ y = 129 \end{cases} \ldots$$

Soluții cu totul particulare, date de d-nii: *Alexandrescu I., Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Boncea N. Spiridon* (lic. Pitești), *Bucurescu C. Ionel* (lic. Odorhei), *Chirilă Ioan* (lic. Milit., Iași), *Cioclov Gh. Gheorghe* (lic. T.-Severin), *Cocârlan Pavel* (lic. Timișoara), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Demetrescu N. August* (lic. Lazăr, București), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Engelman Anton* (Caransebeș), *Gheorghiev N.* (Bolgrad), *Ghișoiu Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu N. H.* (Curtea-de-Argeș), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit, Craiova), *Lică I. Vasile* (lic. Caracal), *Micula O.* (lic. Timișoara), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sassu V. Ioan* (lic. Tg.-Mureș), *Silvian Emil, Sirchis Ion* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

692*. — *Să se calculeze suma seriei:*

$$S = \sum_0^\infty \operatorname{arc\,tg} \frac{2(n+2)}{(n+2)^2 (n^2 + 4n + 3) + 1}.$$

I. N. POPESCU

Dacă notăm:

$$u_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{2(n+2)}{(n+2)^2 (n^2 + 4n + 3) + 1} =$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{(n+2)(n+3) - (n+1)(n+2)}{1 + (n+2)(n+3)(n+1)(n+2)},$$

deducem:

$$(1) \qquad \operatorname{tg} u_n = \frac{(n+2)(n+3) - (n+1)(n+2)}{1 + (n+2)(n+3)(n+1)(n+2)}.$$

Fie a și b două arce, astfel că:

$$(2) \qquad (n+2)(n+3) = \operatorname{tg} a, \quad (n+1)(n+2) = \operatorname{tg} b,$$

atunci (1) devine:

$$\operatorname{tg} u_n = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \operatorname{tg} (a - b)$$

$$\therefore \quad u_n = a - b = \operatorname{arc\,tg} [(n+2)(n+3)] - \operatorname{arc\,tg} [(n+1)(n+2)].$$

Notând:

$$(3) \qquad \varphi(x) = (x+1)(x+2),$$

resultă:

$$u_n = \operatorname{arc\,tg} \varphi(n+1) - \operatorname{arc\,tg} \varphi(n)$$

Atunci:

$$S = \lim_{n=\infty} \sum_{i=0}^{n} [\operatorname{arc\,tg}\, \varphi(n+1) - \operatorname{arc\,tg}\, \varphi(n)] =$$

$$\lim_{n=\infty} \operatorname{arc\,tg}\, \varphi(n+1) - \varphi(0) = \operatorname{arc\,tg}\, \infty - \operatorname{arc\,tg}\, 2 =$$

$$\frac{\pi}{2} - 63^0,\ 26'\ 5'' = 26^0,\ 33'\ 55''.$$

Am luat peste tot arcele cuprinse între 0 și π

Soluții date de d-nii: *Almăjan Petru* (Caransebeș), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Engelmann Anton* (Caransebeș), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Guha Fela* (Caransebeș), *Iacob St. Eugen* (Șc. Milit. de Artilerie), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeș), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași).

PROBLEME PROPUSE

713*. — Care număr zecimal înmulțit cu 6 dă un număr întreg scris cu trei cifre consecutive?

CAP. I LINTES

714*. — Un număr de 5 cifre are ultima cifră 4. Dacă se ia această cifră de la dreapta și se așează la stânga numărului, se obține un număr mai mare cu 16 decât îndoitul numărului dat. Care este numărul dat?

ION DIMITRIU-ARAD.

715. — Să se rezolve ecuația:

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + a = 0,$$

știind că între coeficienți, avem relațiile:

$$a + b = c, \quad a = \frac{d}{2}.$$

EUGEN ȘT. IACOB

716. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^3 \sqrt[6]{y} - y \sqrt[3]{x} = a \\ x^3 \sqrt[6]{y} + i y \sqrt[3]{x} = b\left(x^3 \sqrt[6]{y} - i y \sqrt[3]{x}\right)^{-1}, \end{cases}$$

unde $i = \sqrt{-1}$.

NIC. O. ZAHARIA

717. — Dacă $\frac{a}{b+a}$ este baza logaritmilor, să se determine α astfel ca să avem relația:

$$b(\log a - a) - a(\log b + b) = 2ab \log \alpha$$

GH. TH. GHEORGHIU

718. — Se dă un triunghiu A B C. Se duc înălțimele, care întâlnesc laturile opuse și cercul circumscris triunghiului respectiv, în punctele A_1, B_1, C_1 și A′ B′ C′. Să se arate că dreptele $A_1 B_1$ și A′B′ sunt paralele cu dreapta lui *Simson* a punctului C′.

COSTACHESCU V. C.

719*. — Se dă un patrat A B C D și O centrul său. Pe A O, B O, C O, D O se iau punctele A′, B′, C′, D′ astfel ca:

$$AA' = \frac{AO}{2},\ BB' = \frac{BO}{3},\ CC' = \frac{CO}{4},\ DD' = \frac{DO}{5}.$$

Se cere suprafața patrulaterului A′B′C′D′ în funcție de latura a a patratului A B C D. Să se trateze aceiași chestiune pentru un poligon regulat dat.

V. ALACI

720. — A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu oarecare, să se arate că avem:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^2\frac{A}{2} & \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} \\ 1 & \sin^2\frac{B}{2} & \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\operatorname{cotg}\frac{A}{2} \\ 1 & \sin^2\frac{C}{2} & \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^2\frac{A}{2} & \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} \\ 1 & \cos^2\frac{B}{1} & \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\operatorname{cotg}\frac{A}{2} \\ 1 & \cos^2\frac{C}{2} & \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

CEZAR COSNITA.

INFORMAȚIUNI

Concursul *„Revistei Matematice din Timișoara“*, a întrunit până acum pe următorii corespondenți; în dreptul fiecăruia s'a trecut numărul problemelor rezolvate și publicate în numerile 4, 5, 6, 7, 8, ale revistei, an. VII și numărul de puncte întrunite.

CL. V.

1. *Petrică Ioan* (Cluj).
2. *Oigenstein David* (lic. Bălți).

CL. VI.

1. *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu): 623, 632, 619; *3 puncte*
2. *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași): 614, 618, 623, 626, 633, 620, 627; *7 puncte.*
3. *Bordeianu Adrian* (lic. Milit., Iași): 618, 626, 620; *3 puncte.*
4. *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad): 614, 632; *2 puncte.*
5. *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște).
6. *Gheorghe Gh. Mihai* (lic. Milit., Craiova): 603, 614, 618, 623, 626, 632, 619, 620, 627; *9 puncte.*
7. *Ghișoiu Petre* (lic. Spiru Haret, București).
8. *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași).
9. *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București): 623, 619; *2 puncte.*
10. *Murăroiu I.* (lic. Brașov): 625, 619; *2 puncte.*
11. *Panaite Theodor* (lic. Milit., Iași): 614, 618, 620; *3 puncte.*
12. *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași): 614, 618, 624, 626, 633, 619, 620; *7 puncte.*
13. *Sassu V. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureș): 579; *1 punct.*
14. *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași): 579, 618, 623, 624, 626, 619, 620; *7 puncte.*
15. *Silvian Emil* (București).
16. *Sichis Iosif* (lic. Tighina): 618, 621; *2 puncte.*
17. *Streit Victor* (lic. Internat, Iași).

CL. VII.

1. *Bădescu Amedeu* (lic. Caracal): 579, 624; *2 puncte.*
2. *Bratoșin Radu* (Brașov).
3. *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova): 573, 579, 595, 596, 609, 580, 584, 593, 601, 602, 572, 585, 603, 604, 614, 618, 623, 624, 625, 626, 619, 620; *22 puncte.*
4. *Demetrescu August* (lic. Lazăr, București): 624; *1 punct.*
5. *Dobromirescu Pantelie* (lic. Caracal): 595, 623, 633; *3 puncte.*
6. *Ettinger I. Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București): 603, 618, 621, 623, 625, 626, 633, 630; *8 puncte.*
7. *Gheorghiu A. Alexandru* (lic P.-Neamț): 614, 623, 624, 626, 632, 633, 620, 627, 630; *9 puncte.*
8. *Iancu Gh. David* (lic. Național, Iași): 595, 596, 580, 591, 602, 603, 604, 614, 618, 623, 624, 625, 626, 632, 633; *15 puncte.*
9. *Ionescu Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova): 623, 624, 626, 633, 627, 631: *6 puncte:*
10. *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova): 614, 615, 618, 624, 626, 633: *6 puncte.*
11. *Saur Ioan* (lic. Arad): 621, 626, 633; *3 puncte.*
12. *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov): 579, 618, 620; *3 puncte.*
13. *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași): 574, 579, 595, 584, 591, 601, 602, 614, 618, 623, 624, 626, 633, 637, 619, 627; *16 puncte.*
14. *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu): 579, 595, 596, 587, 603, 618, 623, 624, 626, 633, 620; *11 puncte.*

CL. VIII.

1. *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț): 591, 572, 603, 614, 615, 623, 624, 626, 632; *9 puncte.*
2. *Crăciunescu Eugeniu* (lic. Buzești, Craiova): 614, 615, 624, 626; *4 puncte.*
3. *Crăciunescu I.*
4. *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați): 579, 585, 614, 615, 621, 624, 626, 632, 633, 637; *10 puncte.*
5. *Dragoș Tiberiu* (lic. Arad).
6. *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați): 573, 574, 578, 568, 580, 584, 593, 602, 572, 585, 614; *11 puncte.*
7. *Haim F. L.* (lic. P.-Neamț): 603, 614, 618, 625, 626, 620; *6 puncte.*
8. *Hohoi Vasile* (lic. Brașov): 623, 624, 619; *3 puncte.*
9. *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București): 578, 579, 595, 596, 609, 584, 591, 602, 572, 583, 585, 603, 604, 614. 615, 618, 621, 623, 624, 626, 633, 637, 620, 627, 630; *25 puncte.*
10. *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin): 623, 626, 620; *3 puncte.*
11. *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București): 573, 596, 591, 601, 602, 572, 585, 603, 604, 605, 618, 624, 626, 637, 620, 630; *16 puncte.*
12. *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați): 579. 593, 585, 614, 615, 621, 624, 626, 632, 633, 637; *11 puncte.*

Sucursala Timişoara

ANUL VIII. 15 MAI 1928 NO. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CAP. I. LINTEȘI. ASUPRA UNOR INSUMARI.
2. NOTE MATEMATICE, 8.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 611, 617, 671, 678 684 688 689, 697, 698, 704.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Adminstraţia Revistei, şi se poate proucra în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 100 lei
Anul III, broşat, 100 lei
Anul IV, broşat, 100 lei
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.

ANUL VIII — NO. 3. TIMISOARA, 15 MAI 1928

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

ASUPRA UNOR INSUMARI

de CAP. I. LINTES

In problema No. 12, din *„Revista Matematică din Argentina", No. 2, 1924,* d-l *Dordea,* cere să se simplifice expresia:

$$E = \frac{S_{3,1} + S_{3,2} + \ldots + S_{3,n}}{S_{2,1} + S_{2,2} + \ldots + S_{2,n}},$$

unde:

$$S_{p,n} = 1^p + 2^p + \ldots + n^p.$$

Să punem:

$$S_{p,1} + S_{p,2} + \ldots + S_{p,n} = S_{2,p}(n).$$

Atunci avem:

$$E = \frac{S_{2,3}(n)}{S_{2,2}(n)}.$$

Insă în *„Théorie des Nombres"* par *E. Lucas,* pag. 246, găsesc că:

$$S_{2,2}(n) = \frac{1}{12} n (n+1)^2 (n+2)$$

$$S_{2,3}(n) = \frac{1}{60} n (n+1)(n+2)(n^2+6n+3).$$

Prin urmare:

$$E = \frac{n^2+6n+3}{5(n+1)}.$$

In general însă, tot în tratatul citat mai sus, la pag. 245, se arată că:

$$S_{q,p}(n) = S_{q-1,p}(1) + S_{q-1,p}(2) + \ldots + S_{q-1,p}(n).$$

Și în acest caz s'ar putea concepe expresiuni de forma:

$$E = \frac{S_{\alpha+\beta,p}(n)}{S_{\beta,p}(n)}.$$

Să calculăm câteva exemple:

1) Vedem ușor că:

$$S_{p,0}(n) = \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p!}.$$

2) Să calculăm pe $S_{p,1}(n)$.

Observăm că:

$$S_{p,1}(n) = S_{p-1,1}(1) + S_{p-1,1}(2) + \ldots + S_{p-1,1}(n).$$

$$S_{p-1,1}(n) = S_{p-2,1}(1) + S_{p-2,1}(2) + \ldots + S_{p-2,1}(n).$$

Deci, deducem că:

$$S_{p,1}(n) = n S_{p-2,1}(1) + (n-1) S_{p-2,1}(2) + \ldots + S_{p-2,1}(n).$$

Apoi cum:

$$S_{p-2,1}(n) = S_{p-3,1}(1) + S_{p-3,1}(2) + \ldots + S_{p-3,1}(n),$$

urmează că avem:

$$S_{p,1}(n) = \frac{n(n+1)}{2} S_{p-3,1}(1) + \frac{n(n-1)}{2} S_{p-3,1}(2) + \ldots + S_{p-3,1}(n)$$

Și tot așa în general vom avea:

$$S_{p,1}(n) = \sum_{n=1}^{n} n(n+1)\ldots(n+q-1) S_{p-q,1}(1) + \sum_{n=1}^{n-1} n(n+1)\ldots(n+q-1) S_{p-q,1}(2) + \ldots + S_{p-q,1}(n).$$

Facem $q = p-1$ și cum:

$$S_{1,1}(n) = \frac{n(n+1)}{2},$$

urmează că:

$$S_{p,1}(n)=\sum_{n=1}^{n} n(n+1)\dots(n+p-2)$$
$$+3\sum_{n=1}^{n-1} n(n+1)\dots(n+p-2)$$
$$+6\sum_{n=1}^{n-2} n(n+1)\dots(n+p-2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+\frac{n(n+1)}{2}\sum_{n=1}^{1} n(n+1)\dots(n+p-2)$$

Cum însă:

$$\sum_{n=1}^{n} n(n+1)\dots(n+p-1)=$$
$$\frac{1}{p}\,n(n+1)\dots(n+p-1),$$

urmează că:

$$S_{p,1}(n)=\frac{1}{p}\,n(n+1)\dots(n+p-1)$$
$$+\frac{3}{p}(n-1)n\dots(n+p-2)$$
$$+\frac{6}{p}(n-2)(n-1)\dots(n+p-3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+\frac{n(n+1)}{2p}\cdot 1\cdot 2\dots(p-1).$$

Sau:

$$S_{p,1}(n)=\frac{1}{p}\Big[n(n+1)\dots(n+p-1)$$
$$+3(n-1)n\dots(n+p-2)$$
$$+6(n-2)(n-1)\dots(n+p-3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+\frac{n(n+1)}{2}(p-1)!\Big].$$

Tot astfel se poate calcula $S_{p,2}(n),\dots S_{p,q}(n)$, toate calculele făcându-se din aproape în aproape.

Astfel se poate vedea ușor că:

$$\frac{S_{2,4}(n)}{S_{2,3}(n)}=\frac{(n+1)(2n^2+4n+1)}{n^2+6n+3}.$$

De asemenea:

$$\frac{S_{2,2}(n)}{S_{2,1}(n)}=\frac{n+1}{2},$$

deci dacă n e impar, câtul e întreg. Apoi:

$$\frac{S_{2,4}(n)}{S_{2,2}(n)}=\frac{2n^2+4n+1}{5}.$$

Dar $(2n^2+4n+1)$ este prim cu 5, deci câtul e fracționar.

In sfârșit:

$$\frac{S_{2,3}(n)}{S_{2,1}(n)}=\frac{n^2+6n+3}{10},$$

unde dacă:

$$n=\begin{cases}10k+1\\10k+3\end{cases}$$

expresia este întreagă.

NOTE MATEMATICE

8. *Maximul sau minimul unei funcțiuni simetrice.*

Imi propun să arăt că: *maximul sau minimul unei funcțiuni simetrice de mai multe variabile, legate printr'o relație simetrică, are loc când variabilele sunt egale.*

Să considerăm o funcție simetrică de n variabile:

(1) $$y=f(x_1\,x_3\dots x_n),$$

cu relația de legătură simetrică:

(2) $$\varphi(x_1\,x_2\dots x_n)=0.$$

In baza relației (2), (1) definește pe y ca funcție de $x_1\,x_2\dots x_{n-1}$ direct și prin intermediu lui x_n. Trebue să anulăm derivatele parțiale ale funcției (1):

$$\frac{\delta y}{\delta x_1}+\frac{\delta y}{\delta x_n}\cdot\frac{\delta x_n}{\delta x_1}=0$$
$$\frac{\delta y}{\delta x_2}+\frac{\delta y}{\delta x_n}\cdot\frac{\delta x_n}{\delta x_2}=0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
(3) $$\frac{\delta y}{\delta x_i}+\frac{\delta y}{\delta x_n}\cdot\frac{\delta x_n}{\delta x_i}=0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\delta y}{\delta x_{n-1}}+\frac{\delta y}{\delta x_n}\cdot\frac{\delta x_n}{\delta x_{n-1}}=0.$$

Vom calcula pe $\frac{\delta x_n}{\delta x_1}, \frac{\delta x_n}{\delta x_2}, \ldots \frac{\delta x_n}{\delta x_{n-1}}$ din relaţia (2), care defineşte pe x_n ca funcţie de $x_1 x_2, \ldots x_{n-1}$.

Derivăm parţial relaţia (2) şi avem:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta \varphi}{\delta x_1} + \frac{\delta \varphi}{\delta x_n} \cdot \frac{\delta x_n}{\delta x_1} = 0 \\
&\frac{\delta \varphi}{\delta x_2} + \frac{\delta \varphi}{\delta x_n} \cdot \frac{\delta x_n}{\delta x_2} = 0. \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\delta \varphi}{\delta x_i} + \frac{\delta \varphi}{\delta x_n} \cdot \frac{\delta x_n}{\delta x_i} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\delta \varphi}{\delta x_{n-1}} + \frac{\delta \varphi}{\delta x_n} \cdot \frac{\delta x_n}{\delta x_{n-1}} = 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Eliminăm acum pe $\frac{\delta x_n}{\delta x_1}, \frac{\delta x_n}{\delta x_2}, \ldots \frac{\delta x}{\delta x_{n-1}}$ între relaţiile (3) şi (4) şi găsim:

$$
\frac{\frac{\delta y}{\delta x_1}}{\frac{\delta \varphi}{\delta x_1}} = \frac{\frac{\delta y}{\delta x_2}}{\frac{\delta \varphi}{\delta x_2}} = \ldots = \frac{\frac{\delta y}{\delta x_i}}{\frac{\delta \varphi}{\delta x_i}} = \ldots = \frac{\frac{\delta y}{\delta x_{n-1}}}{\frac{\delta \varphi}{\delta x_{n-1}}}. \tag{4'}
$$

Din aceste relaţii şi din relaţia (2) de legătură aflăm valorile lui $x_1 x_2 \ldots x_n$ pentru care funcţia dată e maximă sau minimă.

Rezultatele de până aici sunt valabile oricare ar fi funcţiile date. Să ne folosim acum de proprietatea că funcţiile date sunt simetrice.

Insă mai înainte de aceasta vom demonstra o relaţie ajutătoare:

Dacă într'o funcţie simetrică:

$$y = f(x_1 x_2 \ldots x_n) \tag{5}$$

facem $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ *atunci avem şi:*

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{\delta y}{\delta x_2} = \ldots = \frac{\delta y}{\delta x_{x-1}}.$$

In adevăr, ştim că derivata funcţiunei (5) în raport cu x_i e limita expresiunii:

$$\frac{f(x_1 x_2 \ldots x_i + h, \; x_{i+1} \ldots x_n) - f(x_1 x_2 \ldots x_n)}{h} \tag{6}$$

iar în raport cu x_{i+1}, e limita expresiei:

$$\frac{f(x_1 x_2 \ldots x_i, \; x_{i+1} + h \ldots x_n) - f(x_1 x_2 \ldots x_n)}{h}. \tag{7}$$

Făcând în (6) şi (7) pe $x_i = x_{i+1} = \alpha$ expresiile care dau derivatele în raport cu x_i şi x_{i+1} devin:

$$\frac{f(x_1 x_2 \ldots \alpha + h, \; \alpha \ldots x_n) - f(x_1 x_2 \ldots x_n)}{h} \tag{8}$$

şi:

$$\frac{f(x_1 x_2 \ldots \alpha, \; \alpha + h \ldots x_n) - f(x_1 x_2 \ldots x_n)}{h}. \tag{9}$$

Funcţiunea $f(x_1 x_2 \ldots (\alpha + h), \; \alpha \ldots x_n)$ e o funcţie simetrică în, $x_1, \; x_2 \ldots x_{i-1}, \; \alpha + h, \; \alpha, \; x_{i+1}, \ldots x_n$, pentru că se deduce din funcţiunea simetrică $f(x_1 x_2 \ldots x_n)$ unde am înlocuit pe $x_i = \alpha + h$ şi pe $x_{i+1} = \alpha$.

Atunci prin definiţia funcţiunilor simetrice avem:

$$f(x_1 x_2 \ldots \alpha + h, \; \alpha \ldots x_n) = f(x_1 x_2 \ldots \alpha, \; \alpha + h \ldots x_n).$$

Inlocuind în (8) observăm că expresia (8) e identică cu expresia (9), adică dacă $x_i = x_{i+1}$, atunci şi:

$$\frac{\delta y}{\delta x_i} = \frac{\delta y}{\delta x_{i+1}}.$$

In general dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ avem şi:

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{\delta y}{\delta x_2} = \ldots = \frac{\delta y}{\delta x_{n-1}}.$$

Intorcându-ne la funcţiunile noastre, observăm în baza celor stabilite mai sus, că funcţiunea (1) are derivatele parţiale egale:

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = \frac{\delta y}{\delta x_2} = \ldots = \frac{\delta y}{\delta x_{n-1}}, \tag{10}$$

dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Funcţiunea (2) are de asemenea derivatele parţiale egale:

$$\frac{\delta \varphi}{\delta x_1} = \frac{\delta \varphi}{\delta x_2} = \ldots = \frac{\delta \varphi}{\delta x_{n-1}},$$

dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Impărţind relaţiile (10) respectiv cu (11) căpătăm tocmai relaţiile (4'), relaţii, care sunt verificate pentru:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Aşa dar, maximul sau minimul unei funcţiuni simetrice de mai multe variabile, cu o relaţie de legătură simetrică, are loc când variabilele sunt egale.

Aplicaţiile acestei teoreme sunt importante şi numeroase: ele se găsesc propuse şi rezolvate în

diferite reviste prin diverse metode. Toate problemele de maxim şi minim de acest fel, se pot rezolva aplicându-li-se teorema stabilită, direct.

Aplicaţii. Exemplul I. *Să se arate că între unghiurile unui triunghiu avem inegalitatea:*

$$1 \leq \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}.$$

(Problema 3462 G. M)

Ştiind că între unghiurile unui triunghiu, avem relaţia $A+B+C=\pi$ şi observând că în funcţia dată şi relaţia de condiţie sunt simetrice, minimul expresiei date, are loc când $A=B=C$ şi valoarea minimă e 1, inegalitatea dată este deci adevărată.

Exemplul II. *Să se afle minimul expresiei:*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$$

ştiind că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = ctă$ *(F. M. No. 412).*

Funcţia dată dată şi relaţia de legătură fiind simetrice, minimul are loc când $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ şi valoarea minimă e $\frac{n^2}{k}$.

C. STAN
Şc. Politechnică Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică.* vol. XXXIII, No. 7, Aprilie 1928. Sur un point remarquable du triangle, *V. Thébault.* Asupra geometriei unui triunghiu deformabil în echilibru, *T. Popovici.*

PROBLEME REZOLVATE

611. — *Să se găsească un număr de două cifre, ştiind că dacă după el se scrie numărul ce se obţine din el sporindu-i toate cifrele cu 1, se obţine un cub.*

COL. GH. BUICLIU

Deosebim două cazuri:

1°. Dacă cubul format este de patru cifre, el va putea fi:

1000, 1331, 1728, 2197, 2744, 3375, 4096, 4913, 5832, 6859, 8000, 9261.

Dintre aceste numere, numai 1728 împlineşte condiţiile problemei, deci numărul de două cifre cerut este 17.

2°. Dacă numărul de două cifre ar fi, $a9$, $9b$, 99, atunci numerile formate în condiţiile problemei ar fi de forma:

$$a9(a+1)10, \quad 9b10(b+1), \quad 991010.$$

Dintre acestea, numerile $a9(a+1)10$, 991010 fiind divizibile cu 2 fără a fi divizibile cu 8, nu's cuburi perfecte.

Numărul care a mai rămas, ţinând seama de terminaţiile unui cub perfect:

01, 08, 27, 64, 25, 16, 43, 12, 29, 00, 31, 28, 97, 44, 75, 96, 13, 32, 59, 61,

n'ar putea fi decât:

90101, 97108,

care nu's cuburi perfecte.

Singura soluţie este deci 17.

Soluţii date de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ), *Aldea Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Antonescu Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Avramescu Th. Ioan* (lic. Carol, Craiova), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Belcescu D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Beşchea G. Nicolae* (lic. Braşov), *Boncea Sp.* (lic. Piteşti), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Căzămîr Iosif* (lic. Arad), *Chivulescu C.* (Târgovişte), *Cocârlan Pavel* (lic. Timişoara), *Coşniţă Cezar* (lic. Bârlad), *Crăciunescu M.* (Craiova), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focşani), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galaţi), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Drăguţ G. Vasile* (lic. Târgovişte), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Fericeanu Ştefan* (Şc. Polit.. Timişoara), *Floareş I. Mircea* (lic. Bacău), *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Gârd I. D-tru, Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Goldştein G. A.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Haim F. L.* (lic. P.-Neamţ), *Iacob Şt. Eugen* (Şc. Milit. de Artilerie), *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Iliescu Th. Teodor* (student, Bucureşti), *Ionescu N. Mihail* (lic. Carol, Craiova), *Manoil A., Manolescu I. N.* (Şc. Polit., Timişoara), *Mărculescu Origen* (lic. Carol. Craiova), *Mocuţa Traian* (lic. Arad), *Niţulescu Gr. Victor* (lic. Caracal), *Panaitescu Ion* (lic. Milit., Craiova), *Pantazi M. Alexandru* (lic. Galaţi), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pavel Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pârvulescu M. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Panaite N. Theodor* (lic. Milit., Iaşi), *Popa Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu Gh. Ovidiu* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu Şt. Toma* (lic. Piteşti), *Popescu C. Virgiliu* (Târgovişte), *Popluca Mircea, Procopiescu St. Nestor* (lic. Caracal), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Sassu V. Ioan* (lic. Tg.-Mureş), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşil, *Scarlat V. D.* (lic. Câmpina), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Segărceanu*

D. C. (Craiova). *Şoimulescu I.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Solniţaru V. Longin Nic.* (lic. Piteşti), *Sprinceană C. Ioan* (lic. Galaţi), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Steblea St. Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Tomescu Valeriu* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Şc. Polit, Leoben-Austria), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Weintraub Mandy* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Zagaican Ilie* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanţa) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

617. — *Să se găsească, patratul perfect de forma a b a c, unde să avem* $b+c=a$, *b şi c fiind diferiţi de a.*

IONESCU GH. VIRGIL

Terminaţiile unui patrat perfect fiind 00, 01, 04, 09, 16, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96 şi cum $c<a$, nu putem lua de cât terminaţiile 41, 61, 64, 76, 81, 84, 96, cu care putem forma următoarele numere în condiţiile problemei:

4341, 6561, 6264, 7176, 8781, 8484, 9396.

Dar numerile 4341, 6264, 7176, 8781, 8484 fiind divizibile cu 3 fără a fi şi cu 9, nu's patrate perfecte, iar dintre numerile rămase, 6561 şi 9396 numai 6561 este patrat perfect:

$$6561=81^2,$$

şi formează singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ), *Aldea N.* (lic. M-rea Dealu), *Almăjan Petru* (lic. Caransebeş), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Băjenescu Pantelie* (lic. Caracal), *Bihoiu Ioan* (Caransebeş), *Bordeianu Adrian* (lic. Milit., Iaşi), *Bratoşin Radu* (lic. Braşov), *Bucurescu I.* (lic. Odorhei), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Cioclov Gheorghe* (lic. T.-Severin), *Cocârlan Pavel* (lic. Timişoara), *Coşniţă Cezar* (lic. Bârlad), *Cristescu I. Anghel* (lic. Oltenita), *Cristescu C. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Davidsohn Moritz* (lic. Botoşani), *Dăscălescu Şt. Hristache* (lic. Focşani). *Demetrescu August* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Diconescu H. Aurel* (lic. milit., Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galaţi), *Dobromirescu P.* (Caracal), *Drăguşeanu Octavian* (lic. Milit., Iaşi), *Drăguţ P. Vasile* (lic. Târgovişte), *Dumitrescu Nicolae* (lic. Timişoara), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Graţian C. Tănase* (lic. Deva), *Grünberg M.* (lic. Naţional, Iaşi), *Hamerak Carol* (lic. Caransebeş), *Hamparţum Grigore* (lic. Constanţa), *Iacob St. Eugen* (Şc. Milit. de Artilerie), *Iliovici G. C-tin, Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Ion* (lic. Caracal), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova). *Ivanovici Th. Valentin* (lic. Călăraşi), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Jumanca Zeno* (Caransebeş), *Ladislau Roht* (Caransebeş), *Magda Ovidiu* (lic. Cluj), *Mazilescu I.-Dolj* (lic. Caracal), *Mihuţ Metodie* (lic. Caransebeş), *Mocuţa T. Traian* (lic. Arad), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Neacşu V.* (Şc. Polit., Timişoara), *Niţulescu Gh. Victor* (lic. Caracal), *Oigenstein D.* (lic. Bălţi), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iaşi), *Panaitescu C. Ion* (lic. Milit., Craiova), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pârvulescu M. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Popescu P. Eugen, Popescu-D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu St. Toma* (lic. Piteşti), *Popescu C. Virgiliu* (student, Bucureşti), *Procopiescu Şt. Nestor* (Caracal), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Scripcă Mihai* (Semin., Pedag., Iaşi), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Şoimulescu I.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Streit Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Ţiucan Marin* (lic. Caracal), *Tomescu C. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Tomescu Valeriu* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Tudose Tănase* (lic. Câmpina), *Ţiucra Mircea* (lic. Timişoara), *Ungureanu D. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Şc. Polit. Leoben-Austria), *Vâlceanu Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanţa) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

Au mai trimis soluţii, d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Morţun A. C-tin* (Semin. Pedag. Iaşi) şi *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

671. — *Fiind date ecuaţiunile:*

$$x^3+a\,x^2+a^2\,x+a^3=0$$

$$x^3+a\,x^2+2\,a^2\,x+3\,a^3=0,$$

să se arate că ele nu poate avea două rădăcini comune. Generalizare.

GH. TH. GHEORGHIU

Presupunem că ecuaţiile date ar avea două rădăcini comune x_1, x_2 şi fie x_3, x'_3 respectiv a treia rădăcină a lor. In virtutea relaţiilor cunoscute între rădăcini şi coeficienţi, avem:

$$x_1+x_2+x_3=-a$$

$$x_1+x_2+x'_3=-a.$$

Comparând aceste relaţii, rezultă:

$$x_3=x'_3,$$

adică cele două ecuaţii ar avea toate rădăcinele comune. Dar, ca două ecuaţii să aibă toate rădăcinele comune, ar trebui să aibă coeficienţii corespunzători proporţionali, şi cum primii coeficienţi sunt egali, ar trebui ca şi ceilalţi să fie respectiv egali, ceiace vedem uşor că nu are loc. Presupunerea că cele două ecuaţii ar avea două rădăcini comune, nu-i adevărată. Ecuaţiile date nu pot avea dar, două rădăcini comune.

Generalizare. Ecuaţiile:

$$x^m + a\,x^{m-1} + a^2\,x^{m-2} + \ldots + a^{m-1} + a^m = 0$$

$$x^m + a\,x^{m-1} + 2\,a^2\,x^{m-2} + \ldots$$

$$\ldots + (m-1)\,a^{m-1}\,x + m\,a^m = 0,$$

nu pot avea m - 1, rădăcini comune.

Dacă ecuaţiile date ar avea $m-1$ rădăcini comune, ar rezulta ca mai sus, ca ele să aibă toate rădăcinele comune, ceiace nu se poate, coeficienţii lor nefiind respectiv proporţionali.

Soluţii date de d-nii: *Garilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti). *Ionescu Haralambie* (C.-de-Argeş), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti) şi *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu).

Soluţia 2-a. O rădăcină comună a ecuaţiilor date, este în acelaşi timp o rădăcină şi a ecuaţiei obţinute făcând diferenţa lor, ecuaţie care este:

$$a^2\,x + 2\,a^3 = 0.$$

Dar aceasta având o singură rădăcină, rezultă că ecuaţiile date nu pot avea două rădăcini comune,

Această demonstraţie se menţine şi pentru cazul general, enunţat mai sus.

Observare. Am putea enunţa propoziţia mai generală, următoarea:

Dacă două ecuaţii, de gradul m, au primii doi coeficienţi egali, iar ceilalţi coeficienţi respectivi, nu toţi egali, cele două ecuaţii nu pot avea $m-1$ rădăcini comuni.

Soluţia 2-a dată de d-nii: *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Dimitriu Al. Ioan* (lic. Galaţi), *Drăguşeanu Octav* (lic. Milit., Iaşi), *Iacob Şt. Eugen* (Şc. Milit. de Artilerie), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Oigenstein D.* (lic. Bălţi), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iaşi), *Popescu P. Eugen*, *Râmniceanu I. Cristian* (lic, Milit., Iaşi), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi) şi *Stan I. Aurelian* (lic. Mlilit., Iaşi).

Alte soluţii date de d-nii: *Băncilă Gheorghe* (Cluj), *Berzovan Emil* (lic. Arad), *Dăscălescu Şt. Hristache* (lic. Focşani), *Dragoş Tiberiu* (lic. Arad), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Hohoi Vasile* (lic. Braşov), *Magda Ovidiu* (lic. Cluj), *Moisescu* (lic. Arad), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu C. Virgiliu* (Târgovişte), *Savin Arnold* (lic. Focşani), *Scurtu O. Nicolae* (lic. Braşov), *Sirchis I.* (lic. Tighina) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

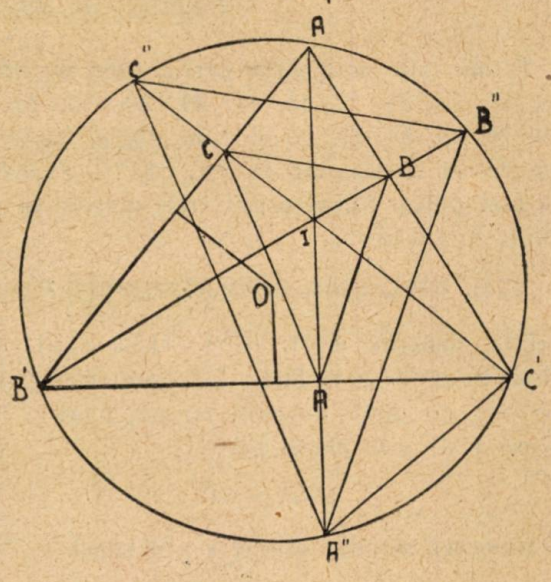
A mai trimis soluţii d-l: *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti).

678. — *Fie* $A'B'C'$ *triunghiul format de bisectoarele exterioare ale unui triunghiu oarecare* ABC. *Se ia în sensul* IA, *segmentul* $AA''=IA$, $BB''=IB$, $CC''=IC$, I *fiind centrul cercului înscris triunghiului* ABC. *Să se arate că:*

1°. *Punctele* A', B', C', A'', B'', C'' *sunt conciclice.*

2°. *Triunghiurile* ABC *şi* $A''B''C''$ *sunt ortologice.*

GH. I. BALABAN



1°. I fiind centrul cercului înscris triunghiului ABC, este punctul de întâlnire al bisectoarelor interioare. Ducând şi bisectoarele exterioare tot a triunghiului ABC, ele ştim că sunt respectiv perpendiculare pe cele interioare şi triunghiul $A'B'C'$ format din intersecţia lor, este astfel că ABC este triunghiul său ortic, I fiind ortocentru.

Astfel fiind, ştim că dacă, $AA''=IA$, $BB''=IB$, $CC''=IC$ ca în figură, punctele A'', B'', C'' se găsesc pe cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$. (*Géometrie*, par F. G. M., cinquième édition, p. 142). Punctele A', B', C', A'', B'', C'' sunt deci conciclice.

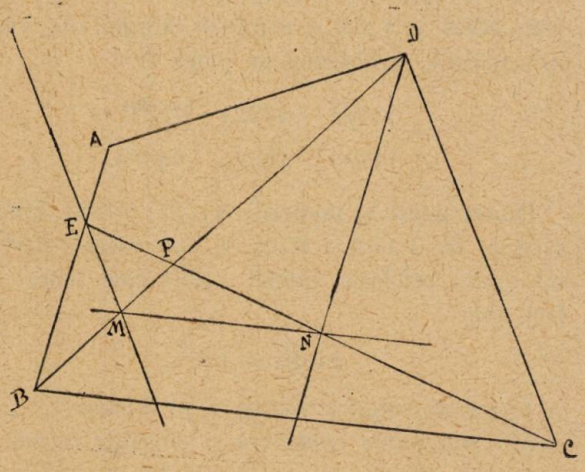
2°. Triunghiurile ABC şi $A''B''C''$ au laturile peralele, căci AC, AB, BC unesc mijloace a două laturi din triunghiurile $A''IC''$, $A''IB''$, $B''IC''$. Acum uşor conchidem că triunghiurile ABC şi $A''B''C''$ sunt ortologice, căci perpendicularile duse

din vârfurile unui triunghiu pe laturile celuilalt sunt concurente, ele fiind înălțimele celui dintâi, căci laturile celor două triunghiuri sunt paralele, cum am învederat mai sus.

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț)' *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Boncea N. Spiridon* (lic. Pitești), *Bucurescu C. I.* (lic. Odorhei), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Dănciulescu Gr. Virgiliu, Dinu S. D-tru* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Gheorghe Mihai* (lic, Milit., Craiova), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați), *Ghișoiu Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Hohoi Vasile* (lic. Brașov), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeș), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Leibovici R. Emil* (lic. Pitești), *Mihuț Metodie* (lic. Caransebeș), *Morțun A. C-tin* (Semin. Pedag., Iași), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Negoescu Ioan* (lic. Milit., Iași), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iași), *Scurtu A Nicolae* (lic. Brașov), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași).

684. — *Intr'un patrulater convex* ABCD, *se ia pe latura* AB *un punct* E. *Prin* E *se duce o paralelă la latura* CD, *care taie diagonala* BD *în* M. *Prin* D *se duce o paralelă la* AB, *care taie dreapta* EC, *în* N. *Să se arate că* MN *este paralelă cu* BC.

CRISTESCU C. IOAN



Construim figura în condițiile problemei. EM fiind paralelă cu CD, rezultă că triunghiurile EPM și CPD sunt asemenea, deci:

$$\frac{PM}{PD}=\frac{EP}{PC},$$

sau:

(1) $$PM\times PC=EP\times PD.$$

DN fiind paralelă cu AB, rezultă că triunghiurile EPB și PND sunt asemenea, deci;

$$\frac{PB}{PD}=\frac{EP}{PN},$$

sau:

(2) $$PB\times PN=EP\times PD.$$

Comparând egalitățile (1) și (2), putem scri:

$$PM\times PC=PB\times PN.$$

$$\therefore \frac{PM}{PB}=\frac{PN}{PC}.$$

Această egalitate ne spune că dreapta MN este paralelă cu BC.

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Antonescu I. C-tin* (Buzău), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Bâcicov Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov Victor* (lic. Tighina), *Cisman Ion* (lic. T.-Severin), *Cioclov Gh.* (lic. T.-Severin), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Costăchescu V. C-tin, Cristescu C. Ion* (lic. Lazăr, București), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Demetrescu August* (lic. Lazăr, București), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Ganea Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghief N.* (Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Ghișoiu Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Ionescu Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Hascal Jenică* (lic. Roman), *Mărășescu Ioan* (Șc. de Conduct., Cluj), *Micula O.* (lic. Timișoara), *Mihuț Metodie* (lic. Caransebeș), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Neacșu Vasile* (Șc. Polit., Timișoara), *Panaite N. Theodor* (lic. Milit., Iași), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Popescu Eugen* (lic. T.-Severin), *Procopiescu St. Nestor* (Caracal), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Saur A. Ioan* (lic. Arad), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Silogi Aureliu* (lic. T.-Severin), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stan C.* (Timișoara), *Topleanu C-tin* (lic. Caransebeș), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Șc. Polit., Leoben-Austria), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vlad Aurel* (Buzău) și *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu).

Au mai trimis soluții: d-nii: *Bersovan Emil* (lic. Arad), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați) și *Iacob Șt. Eugen* (Șc. Milit. de Artilerie).

Observare. D-l *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), a demonstrat că problema se menține și în cazul patrulaterului concav, dând o soluție analitică.

688* — *Să se stabilească identitatea:*

$$5\cos t + 3\cos 3t + \cos 5t = 2^4 \cos t \left(\cos t - \cos\frac{\pi}{3}\right)^2 \left(\cos t - \cos\frac{2\pi}{3}\right)^2.$$

V. ALACI

Insemnând cu E primul membru, putem scri succesiv:

$$E = 5\cos t + 3(4\cos^3 t - 3\cos t) + 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t = 16\cos^5 t - 8\cos^3 t + \cos t =$$

$$16\cos t\left(\cos^4 t - \frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{16}\right) =$$

$$2^4 \cos t \left(\cos^2 t - \frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$2^4 \cos t \left(\cos t - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\cos t + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Cum:

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}, \quad -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3},$$

putem scri încă:

$$E = 2^4 \cos t \left(\cos t - \cos\frac{\pi}{3}\right)^2 \left(\cos t - \cos\frac{2\pi}{3}\right).$$

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Aldea Nicolae* (lic M-rea Dealu), *Cioclov Gheorghe* (lic. T.-Severin), *Climescu C. Al.* (Semin. Pedag., Iași), *Dănciulescu Gr. Virgiliu*, *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Hohoi Vasile* (lic. Brașov), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Morțun A. C-tin* (Semin. Pedag., Iași), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conduct., Cluj), *Popescu P. Eugen* (T.-Severin) și *Zaharia O. Ioan* (lic. T.-Severin).

Altă soluție. Folosim relația cunoscută:

$$(2p+1)\cos t + (2p-1)\cos 3t + \ldots + 3\cos(2p-1)t + \cos(2p+1)t = 2^{2p}\cos t \prod_{k=1}^{p}\left(\cos t - \cos\frac{k\pi}{p+1}\right)^2$$

din „R. M. T.", an. VII, No. 9, pag. 145.

Dacă luăm:

$$p = 2,$$

găsim:

$$5\cos t + 3\cos 3t + \cos 5t = 2^4 \cos t \left(\cos t - \cos\frac{\pi}{3}\right)^2 \left(\cos t - \cos\frac{2\pi}{3}\right)^2,$$

tocmai identitatea cerută.

Soluții analoage, date de d-nii: *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași) *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu*, *Demetrescu N. August* (lic. Lazăr, București), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Ghișoiu Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Ionescu M. Haralambie* (C. de Argeș), *Ionescu Țiu D. C-tin* (lic. Mil.-Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Panaite N. Theodor* (lic. Milit., Iași), *Pavel H. Nicolae* (lic, Carol, Craiova), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conduct., Cluj), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, București), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași) și *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara).

A mai trimis soluții d-l: *Drăguț S. Vasilie* (lic. Târgoviște).

689. — *Să se găsească un patrat perfect de forma abccb, unde* $b = \frac{c}{2}$, *iar prima cifră este un patrat perfect.*

EUGEN ȘT. IACOB

Terminațiile unui patrat perfect fiind: 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96, vedem că numai:

21 și 84,

satisfac condiția:

$$b = \frac{c}{2}.$$

De altă parte ținând seamă că a este patrat perfect, adică 1, 4 sau 9, urmează că numerile $abccb$, în condițiile problemei ar putea fi:

11221, 41221 91221

14884, 44884, 94884.

Dintre acestea, numerile 91221, 94884 fiind divizibile cu 3 fără a fi cu 9, nu's patrate perfecte, iar dintre celelalte, numai 14884 este patrat perfect, căci:

$$14884 = 122^2,$$

și formează singura soluție a problemei.

Am mai putea considera și soluțiile banale:

$$10000 = 100^2, \quad 40000 = 200^2, \quad 90000 = 300^2.$$

Soluții date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjan Petru* (Caransebeș), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Avramescn Th. Ioan* (Caracal), *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Bâcicov Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov Nistor* (lic. Tighina), *Bâjenescu Pantelie* (lic. Caracal), *Bihoiu Ioan* (Caransebeș),

Böhm Wilhelm (lic. Caransebeș), *Boroianu D. C-tin* (lic. Matei-Basarab, București), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Bucurescu C. I.* (lic. Odorhei), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Davidsohn S. Moritz* (lic. Botoșani), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focșani), *Diaconescu H. Aurel* (lic. Milit., Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dobromirescu P.* (Caracal). *Drăguşeanu O.* (lic. Milit., Iași), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Dumitrescu Nicolae* (lic. Timișoara), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiev N.* (Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Gheorghiu Mircea* (Tg.-Jiu), *Ghișoiu Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Grünberg L. M.* (lic. Național, Iași), *Hamerak Carol* (Caransebeș), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeș), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Ivanovici Th. Valentin* (lic. Călărași), *Ladislau Roth* (Caransebeș), *Lică I. Sassu* (lic. Caracal), *Micula O.* (lic. Timișoara), *Mihuț Metodie* (Caransebeș), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Neacșu Vasile* (Șc. Polit., Timișoara), *Oighenstein D.* (lic. Bălți), *Panaite N. Theodor* (lic. Milit., Iași), *Panaitescu Ion* (lic. Milit., Craiova), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Popescu Ion* (Învățător, Cristești-Fălticeni). *Popescu C. Virgiliu* (Șc. Polit, Nancy), *Procopiescu St. Nestor* (Caracal), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Sassu V. Ioan* (lic. Tg.-Mureș), *Savin Arnold* (lic. Focșani), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași). *Scarlat D.* (lic. Câmpina), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Simionescu Grigore* (lic. Milit., Craiova), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Streit I. Victor* (lic. Internat, Iași), *Tache Z. D-tru* (lic. Caracal), *Topliceanu C-tin* (lic. Caransebeș), *Tudose Tănase* (lic. Câmpina), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța), *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța) și *Zelțer Leonard* (lic. Matei-Basarab, București).

Au mai trimis soluții d-nii: *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Ettinger Alexandru*, *Hamerak C.* (Caransebeș) și *Morțun A. C-tin* (Semin. Pedag. Iași) și *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București).

697. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel ca prima cifră înmulțită cu ultima să dea un număr format din cifra a treia urmată de întâia.*

GH. SPRINCEANA

Fie $a\,b\,c\,d$ pătratul cerut. Conform enunțului, avem:

$$a\,d = 10\,c + a$$

$$\therefore\quad a\,(d-1) = 10\,c,$$

sau:

$$a = \frac{10\,c}{d-1}.$$

d fiind terminația unui patrat perfect ($d \leqq 1$), poate fi, 1, 4, 5, 6, 9. Vom cerceta deci aceste cazuri,

1°. Dacă, $d = 1$, atunci:

$$c = 0,$$

iar $a\,b\,c\,d$, ia forma: $a\,b\,0\,1$. Rădăcina patrată a acestui număr, ar putea fi de forma: 39, 41, 49, 51, 59, 61, 69, 71, 79, 81, 89, 91, 99. Ridicând aceste numere la patrat găsim respectiv: 1521, 1681, 2401, 2601, 3481, 3721, 4761, 5041, 6241, 6561, 7921, 8281, 9861. Vedem că numai trei dintre aceste numere, răspund problemei:

$$2401 = 49^2,\quad 2601 = 51^2,\quad 9801 = 99^2.$$

2°. Dacă $d = 4$, atunci:

$$a = \frac{10\,c}{3},$$

relație care nu poate fi satisfăcută, a și c fiind de o singură cifră.

3°. Dacă, $d = 5$, atunci:

$$a = \frac{10\,c}{4} = \frac{5\,c}{2}.$$

Putem lua numai $c = 2$, la care corespunde $a = 5$, iar $a\,b\,c\,d$ ia forma, $5\,b\,2\,5$. Rădăcina patrată a acestui număr, ar putea fi numai 75 și fiindcă:

$$75^2 = 5625,$$

rezultă că 5625 este o solutie a problemei.

4°. Dacă, $d = 6$, atunci:

$$a = \frac{10\,c}{5} = 2\,c.$$

In acest caz putem lua, $c = 1, 2, 3, 4$, la care corespunde $a = 2, 4, 6, 8$, iar numărul $a\,b\,c\,d$, poate fi:

$$2\,b\,1\,6,\quad 4\,b\,2\,6,\quad 6\,b\,3\,6,\quad 8\,b\,4\,6.$$

Ținând seama de terminațiile unui patrat perfect: 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96, vedem că numerile $4\,b\,2\,6$ și $8\,b\,4\,6$, n'ar putea fi patrate perfecte. Rămâne să examinăm numai numerile $2\,b\,1\,6$ și $6\,b\,3\,6$, care pot fi patrate perfecte.

Rădăcina patrată a acestor numere ar putea fi respectiv 44, 46, 54, 56; 74, 76, 84, 86,

Patratele acestor numere sunt: 1936, 2116, 2816, 3136; 5746, 5776, 7056, 7396. Vedem că numai două din aceste numere răspund problemei:

$$2116 = 46^2 \text{ și } 2816 = 54^2.$$

4°. Dacă, $d = 9$, atunci:

$$a = \frac{10c}{9},$$

relația care nu poate fi satisfăcută, a și c fiind de o singură cifră.

In total problema are șase soluții:

Au găsit cele 6 soluții, d-nii: Brotmann I. (lic. Matei-Basarab, București), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Demetrescu August* (lic. Lazăr, București), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București).

A dat 5 soluții, d-nul: Gheorghiu Th. Gh. (lic. Galați).

A dat 4 soluții, d-nul: Mihuț Metodie (lic. Caransebeș).

Au dat 3 soluții, d-nii: Aldea N. Nicolae (lic. M-rea Dealu), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Avramescu Th. Ion* (Caracal), *Bâcicov Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov Victor* (lic. Tighina), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Neacșu Vasile* (Șc. Polit., Timișoara), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Scarlat D.* (lic. Câmpina), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Tache Z. D-tru* (lic. Caracal) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

Au dat 2 soluții. d-nii: Almăjan Petru (Caransebeș), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Băjenescu Pantelie* (lic. Caracal), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Chirilă Ioan* (lic. Milit., Iași), *Davidsohn Moritz* (lic. Botoșani), *Dobromirescu P.* (Caracal), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Naamț), *Ghișoiu Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Iacob Șt. Eugen* (Șc. Milit. de Artilerie), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Popescu C. Virgiliu* (Șc. Electrotechnică, Nancy), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) și *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu).

Au dat o singură soluție, d-nii: Bihoiu Ioan (Caransebeș), *Bucurescu C. Ionel* (lic. Odorhei), *Engelmann Anton* (Caransebeș), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, București), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Handler Gheorghe, Jumanca Zeno* (Caransebeș), *Mățu Petru* (lic. Caransebeș), *Popescu I.* (Fălticeni), *Roth Ladislau* (Caransebeș), *Sassu V. Ioan* (lic. Tg.-Mureș), *Stoian N. C-tin* (lic. Botoșani), *Streit Victor* (lic. Internat, Iași), *Vlad F. Aurel* și *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța),

Au mai trimis soluții d-nii: *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Ettinger Alexandru, Hamerak C.* (Caransebeș), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit. Iași), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București) și *Saur Ioan* (lic. Arad).

698, — *Se cere patratul perfect de șase cifre, în care prima cifră este egală cu a cincea, cifra treia scrisă după ultima ne dă un patrat perfect și a patra cifră scrisă după a doua ne dă a treia cifră mărită cu 1.*

TR. MARINEANU

Fie $abcdef$ patratul căutat. Conform enunțului avem:

$$a = e, \quad fc = u^2, \quad bd = c + 1.$$

fc fiind patrat perfect, poate fi:

00, 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81,

f fiind ultima cifră a unui patrat perfect, nu poate fi 2, 3, 8 deci grupele 25, 36, 81 le lăsăm la o parte.

Cu grupele rămase putem forma următoarele numere observând cine este c și f:

(1) $ab0da0$, $ab1ca0$, $ab4da0$, $ab9da0$,

$ab6da1$, $ab9da4$, $ab4da6$.

Primele patru numere din (1) fiind terminate cu 0, se divid cu 10 și fiind patrate perfecte, ar trebui să se dividă cu 100, adică să avem $a = 0$, dar în acest caz ele nu mai sunt numere de 6cifre.

Așa dar patratele căutate de șase cifre, rămân de forma:

(2) $ab6da1$, $ab9da4$, $ab4da6$.

Cum $a = 6, 9, 4$, ținând seama de relația:

$$bd = c + 1,$$

rezultă:

$$bd = 07, 10, 05,$$

și deci (2) devine:

(3) $a067a1$, $a190a4$, $a045a6$.

Ținând seama de terminațiile unui patrat perfect: 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96, rezultă că numerile (3) ca să fie patrate perfecte, ar trebui să fie de forma;

206721, 406741, 606761, 806781,

219024, 419044, 619064, 819084,

104516, 304536, 504556, 704576, 904596.

Dintre acestea, numerile 206721. 806781, 819084, 304536, 904596 fiind divizibile cu 3, fără a fi cu 9, nu pot fi patrate perfecte.

Dintre numerile rămase, constatăm că numai 219024 este patrat perfect:

$$219024 = 468^2,$$

care constitue singura soluție a problemei.

Soluţii date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjan Petru* (lic, Caransebeş), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Avramescu T. Ioan* (Caracal), *Balaban I. Gh.* (Bârlad), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Bâcicov Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov Victor* (lic. Tighina), *Bihoiu Ioan* (Caransebeş), *Boroianu D. C-tin* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Böhm Wilhelm* (lic. Caransebeş), *Bucurescu C. Ionel* (lic. Odorhei), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Coşniţă Cezar* (lic. Bârlad), *Davidsohn Moritz* (lic. Botoşani), *Dobromirescu P.* (Caracal), *Drăguţ G. Vasile* (lic. Târgovişte), *Dumitrescu Nicolae* (lic. Timişoara), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galaţi), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Hamerak Carol* (lic. Caransebeş), *Handler Gheorghe*, *Iacob St. Eugen* (Şc. de Artilerte din Timişoara), *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Ionescu C.* C. (lic. Milit., Iaşi), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Jumanca Zeno* (Caransebeş), *Ladislau Roth* (Caransebeş), *Mâţu Petru* (lic. Caransebeş), *Micula O.* (lic. Timişoara), *Mihuţ Metodie* (lic. Caransebeş), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu I.* (Fălticeni), *Popescu C. Virgiliu* (Şc. Electrotechnică, Nancy), *Procopiescu St. Nestor* (lic. Caracal). *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Sassu V. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Scarlat D.* (lic. Câmpina), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stoian N. C-tin* (lic. Botoşani), *Streit Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Tudose Tănase* (lic. Câmpina), *Ţiucra Mircea* (lic. Timişoara), *Vălceanu N. Justin* (lie. Tg.-Jiu), *Vlad F. Aurel*, *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu), *Zaharia O. Ion* (lic. Constanţa) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

Au mai trimis soluţii d-nii: *Brotmann Izidor* (lic. Matei-Basarab, Bncureşti), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Morţun A. C-tin* (Semin. Pedag, Iaşi), *Petrică I. Ioan* (Cluj) şi *Vâlsănescu Viorel* (lic. Piteşti).

704. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$2\cos^4 x + (4+\sqrt{3})\cos^3 x - 2(1-\sqrt{3})\cos^2 x - (4+\sqrt{3})\cos x - 2\sqrt{3} = 0.$$

CEZAR COSNITA

Ecuaţia dată se poate scri succesiv:

$$2\cos^2 x(\cos^2 x - 1) + (4+\sqrt{3})\cos x(\cos^2 x - 1) + 2\sqrt{3}(\cos^2 x - 1) = 0.$$

$$\therefore (\cos^2 x - 1)[2\cos^2 x + (4+\sqrt{3})\cos x + 2\sqrt{3}] = 0,$$

Această ecuaţie este echivalentă cu următoarele:

(1) $$\cos^2 x - 1 = 0$$

(2) $$2\cos^2 x + (4+\sqrt{3})\cos x + 2\sqrt{3} = 0.$$

Prima ecuaţie se poate scri:

$$\cos x - 1 = 0, \quad \cos x + 1 = 0,$$

cu rădăcinele respectiv:

$$x_1 = 2k\pi, \quad x_2 = (2k+1)\pi, \quad (k \text{ întreg oarecare}).$$

Ecuaţia (2) se poate scri:

$$2\cos x(\cos x + 2) + \sqrt{3}(\cos x + 2) = 0,$$

$$\therefore (\cos x + 2)(2\cos x + \sqrt{3}) = 0,$$

sau:

$$\cos = -2, \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

cu rădăcinele respectiv:

$$x_3 = \text{imaginar}, \quad x_4 = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{2}.$$

Soluţii date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjean Petru* (Caransebeş), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Bâcicov Boris* (lic. Tighina), *Bârloiu D. Nicolae* (lic. Târgovişte), *Böhm Wilhelm* (lic. Caransebeş), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Bucurescu C. Ionel* (lic. Odorhei), *Chirilă S. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Demetrescu August* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galaţi), *Dobromirescu P.*, *Drăguţ G. Vasile* (lic. Târgovişte), *Dumitrescu Nicolae* (lic. Timişoara), *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Gavrilescu Vasile* (lic. Braşov), *Gheorghiev N.*, *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Hascal Jenică*, *Hemerak Carol* (Caransebeş), *Iacob Şt. Eugen* (Şc. Milit. de Artilerie), *Iancu D.* (lic. Naţional, Iaşi), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeş), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Jurca Corneliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Neacşu Vasile* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu Gh. Ovidiu* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Micula O.* (lic. Timişoara), *Mihuţ Metodie* (lic. Caransebeş), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Scarlat D.* (Câmpina), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Slicaru C.* (lic. Naţional, Iaşi), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Topleceanu C-tin* (lic. Caransebeş), *Tudose C. Tănase*, *Ţiucra Mircea* (lic. Timişoara), *Vâlceanu Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ion* (lic. T.-Jiu), *Zaharia O. Ioan* (lic. Constanţa) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

Au mai trimis soluţii, d-nii: *Bersovan Emil* (lic. Arad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti), *Ettinger Alexandru*, *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit. Iaşi), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti) şi *Petrică I. Ioan* (Şc. de Conductor, Cluj).

PROBLEME PROPUSE

— 721. — Să se arate că pentru n par, expresiunea:

$$E = (5^m - 4m - 1)\left[5^{4m+3} + 2\,(2^{6n+3} + 1)\right],$$

se divide prin 208, m fiind întreg pozitiv.

POPESCU D. STELIAN

722. — Să se dovedească că ecuaţiile:

$$6x^2 + 2\sqrt{2}\,(a+b+c)\,x + ab + bc + ca = 0$$

$$2x^2 + 2\sqrt{2}\,(a+b+c)\,x + ab + bc + ca = 0$$

$$x^2 + \sqrt{3}\,(a+b+c)\,x + 2\,(ab + bc + ca) = 0,$$

au rădăcinele reale, oricare ar fi a, b, c, reali.

COSNITA CEZAR

723. — Să se demonstreze că expresia:

$$n^2(n-1) + (n-1)^2(n-2)\,C_n^1\,a + (n-2)^2(n-3)\,C_n^2\,a^2 + \ldots + 2^2\,C_n^{n-2}\,a^{n-2},$$

este divizibilă prin $2a+n$, şi să se găsească câtul.

GH. SPRINCEANA

724. — Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul de centru O. Să se arate că tangentele duse la acest cerc prin punctele diametral opuse vârfurilor, întâlnesc laturile triunghiului respectiv în trei puncte colineare.

N. G. BOTEA

725*. — Se dă triunghiul cu laturile:

$$(BC) \equiv y + 2 = 0, \quad (CA) \equiv x + y - 7 = 0$$

şi

$$(AB) \equiv 5x - y + 13 = 0.$$

1°. Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului dat.

2°. Fie D şi E punctele unde înălţimea şi diametrul din vârful A, taie respectiv, pentru a doua oară cercul. Se ia pe cerc simetricul B' a lui B faţă de centrul cercului. Să se arate că perpendiculara din B' pe AC, trece prin D.

3°. Prin ortocentrul H al triunghiului se duce paralela FG la latura BC a triunghiului. In F ridicăm o perpendiculară pe AB, care taie pe AC în F'; iar în G ridicăm o perpendiculară pe AC, care taie pe AB în G'. Să se arate că F'G' este tangentă la cerc în punctul E.

4°. Prin origina axelor se duc două coarde, OL şi ON, perpendiculare între ele. Să se afle locul mijlocului coardei LN.

5°. Să se alfe locul proecţiei originei pe coarda LN şi să se explice rezultatul.

I. DIMITRIU-ARAD

726. — Să se stabilească identiatea:

$$2^{p+2}\sin^2\frac{t}{2}\sin p\,t\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t - \cos\frac{2k\pi}{2p+1}\right) = \sin t + \sin 2p\,t - \sin(2p+1)\,t.$$

PETRE I. GHISOIU

727. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{\alpha a^n h_a^n + \beta b^n h_b^n + \gamma c^n h_c^n}{\alpha r_a^n \cot^n\frac{A}{2} + \beta r_b^n \cot^n\frac{B}{2} + \gamma r_c^n \cot^n\frac{C}{2}} = 2^n r^n,$$

notaţiile fiind cele obicinuite, iar α, β, γ sunt numere oarecare.

EUGEN ST. IACOB

728*. — Se dă un carton circular şi omogen de centru O. De o parte şi de alta a centrului, se duc două coarde paralele AB şi CD, egale respectiv cu latura patratului şi a exagonului, înscrise în cercul O. Se fac în cartonul dat, două deschideri circulare, cercurile de deschidere fiind înscrise respectiv în triunghiurile OAB şi OCD. Se cere centrul de greutate al cartonului rămas, dupăce am scos cele două discuri circulare.

V. ALACI

INFORMAȚIUNI

Inscrierile pentru concursul „R. M. T.“, anunțat în No. 9, an. VII, se primesc numai până la 20 Martie 1928. Problemele pentru concurs sunt toate cele ce se vor publica în zece numere consecutive, începând cu No. 9, an. VII, sub titlu *„Probleme propuse“*.

Rezultatul se va publica, după ce toate problemele de concurs vor fi rezolvate în cuprinsul revistei.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 80 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

Sucursala Timişoara

ANUL VIII. 15 IUNIE 1928 No. 4

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. NIC. O. ZAHARIA. INEGALITATI INTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHIU
2. NOTE MATEMATICE, 9
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 672, 676, 690, 703, 705, 706, 710, 711.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Adminstraţia Revistei, şi se poate proucra în schimbul preţului:

Anul I, epuizat
Anul II, broşat, 100 lei
Anul III, broşat, 100 lei
Anul IV, broşat, 100 lei
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.

ANUL VIII — No. 4. TIMISOARA, 15 IUNIE 1928

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

INEGALITAȚI INTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHIU

de NIC. O. ZAHARIA
(lic. Constanța)

Plecând dela inegalități algebrice cunoscute, se pot deduce inegalități între anumite elemente ale triunghiului.

1°. Considerăm inegalitatea evidentă:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqq 0,$$

care prin desvoltare, devine:

$$(1) \qquad x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx.$$

Dacă în această inegalitate facem: $x=r_a$, $y=r_b$, $z=r_c$; r_a, r_b, r_c, fiind razele cercurilor exînscrise, obținem:

$$(2) \qquad r_a^2+r_b^2+r_c^2 \geqq r_a r_b+r_b r_c+r_c r_a,$$

dar: $r_a r_b+r_b r_c+r_c r_a=p^2$, deci inegalitatea (2)' devine:

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2 \geqq p^2.$$

Să împărțim această inegalitate cu $r_a r_b r_c=\frac{S^2}{r}$, avem:

$$\frac{r_a}{r_b r_c}+\frac{r_b}{r_c r_a}+\frac{r_c}{r_a r_b} \geqq \frac{p^2 r}{S^2}.$$

Dacă înlocuim convenabil: r_a, r_b, r_c prin $\frac{S}{p-a}$, $\frac{S}{p-b}$, $\frac{S}{p-c}$ avem:

$$\frac{r_a}{r_b}\cdot\frac{p-c}{S}+\frac{r_b}{r_c}\cdot\frac{p-a}{S}+\frac{r_c}{r_a}\cdot\frac{p-b}{S} \geqq \frac{p^2 r}{S^2}.$$

Dacă înmulțim cu S și ținem seama că $S=pr$, obținem:

$$\frac{r_a}{r_b}(p-c)+\frac{r_b}{r_c}(p-a)+\frac{r_c}{r_a}(p-b) \geqq p,$$

inegalitate care face subiectul problemei 3599 din *„Gazeta Matematică“*, vol. XXXIII.

Dacă însă facem:

$$x=h_a=2R\sin B\sin C;\quad y=h_b=2R\sin A\sin C;$$

$$z=h_c=2R\sin A\sin B,$$

în inegalitatea (1), avem după ce am împărțit cu $4R^2$:

$$\sin^2 B\sin^2 C+\sin^2 A\sin^2 C+\sin^2 A\sin^2 B \geqq \sin A\sin B\sin C(\sin A+\sin B+\sin C).$$

Sau, împărțind cu $\sin A\sin B\sin C$, avem:

$$\frac{\sin B\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C\sin A}{\sin B}+\frac{\sin A\sin B}{\sin C} \geqq \sin A+\sin B+\sin C.$$

Tot astfel înlocuind x, y, și z respectiv prin cotg A, cotg B, cotg C, și ținând seama de relația:

$$\operatorname{cotg} A\operatorname{cotg} B+\operatorname{cotg} B\operatorname{cotg} C+\operatorname{cotg} C\operatorname{cotg} A=1,$$

obținem inegalitatea:

$$\operatorname{cotg}^2 A+\operatorname{cotg}^2 B+\operatorname{cotg}^2 C \geqq 1.$$

(„Culegere de probleme de trigonometrie de I. Ț. I. C.“ exerc. 45, cap. XVII).

2°. Să considerăm inegalitatea:

$$(x+y-z)^2+(x+z-y)^2+(y+z-x)^2 \geqq xy+yz+zx.$$

Făcând $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$, $z=\frac{c}{2}$, avem:

$$(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2 \geqq \frac{1}{4}(ab+bc+ca)$$

și cum:

$$p-a=\frac{S}{r_a},\quad p-b=\frac{S}{r_b},\quad p-c=\frac{S}{r_c}$$

și:

$$a=\frac{2s}{h_a},\quad b=\frac{2s}{h_b},\quad c=\frac{2s}{h_c},$$

rezultă:

$$\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}\geqq\frac{1}{h_a h_b}+\frac{1}{h_b h_c}+\frac{1}{h_c h_a}.$$

Dacă însă facem:

$$x=p-a;\quad y=p-b,\quad z=p-c,$$

obținem după oarecari transformări:

$$(2a-p)^2+(2b-p)^2+(2c-p)^2\geqq$$
$$(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a),$$

și ținând seama de relațiile:

$$(p-a)(p-b)=r r_c;\quad (p-b)(p-c)=r r_a;$$
$$(p-c)(p-a)=r r_b,$$

avem:

$$(2a-p)^2+(2b-p)^2+(2c-p)^2\geqq r(r_a+r_b+r_c).$$

Dacă facem, $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$, avem:

$$(3)\quad \left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_c}\right)^2+\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_b}\right)^2+$$
$$\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_a}\right)^2\geqq\frac{1}{r_a r_b}+\frac{1}{r_b r_c}+\frac{1}{r_c r_a}.$$

Insă:

$$(4)\quad \frac{1}{r_a r_b}+\frac{1}{r_b r_c}+\frac{1}{r_c r_a}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r_a}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{r_b}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}\right)+\frac{1}{r_c}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)\right].$$

Inlocuind în (3) și ținând seama că în orice triunghiu există relația:

$$(5)\quad \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c},$$

obținem inegalitatea:

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{r_c}\right)^2+\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{r_b}\right)^2+\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{r_a}\right)^2\geqq$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r_a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)+\frac{1}{r_b}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}\right)+\frac{1}{r_c}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}\right)\right],$$

sau înlocuind pe (4) în (3) și ținând seama că în orice triunghiu există relațiile:

$$(6)\quad \frac{2}{h_a}=\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c};\quad \frac{2}{h_b}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c};\quad \frac{2}{h_c}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b},$$

obținem:

$$\left(\frac{2}{h_a}-\frac{1}{r_a}\right)^2+\left(\frac{2}{h_b}-\frac{1}{r_b}\right)^2+\left(\frac{2}{h_c}-\frac{1}{r_c}\right)^2\geqq$$
$$\frac{1}{r_a h_a}+\frac{1}{r_b h_b}+\frac{1}{r_c h_c}.$$

Dacă în identitatea considerată, facem:

$$x=\frac{1}{h_a},\quad y=\frac{1}{h_b},\quad z=\frac{1}{h_c},$$

avem:

$$\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)^2+\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)^2+$$
$$\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)^2\geqq\frac{1}{h_a h_b}+\frac{1}{h_b h_c}+\frac{1}{h_c h_a},$$

sau:

$$\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)^2+\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)^2+$$
$$\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)^2\geqq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{h_a}\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{h_b}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}\right)+\frac{1}{h_c}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}\right)\right],$$

și ținând seama de (5) avem:

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{h_a}\right)^2+\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{h_b}\right)^2+\left(\frac{1}{r}-\frac{2}{h_c}\right)^2\geqq$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{h_a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_a}\right)+\frac{1}{h_b}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_b}\right)+\frac{1}{h_c}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_c}\right)\right].$$

3. Dacă în inegalitatea:

$$a^3+b^3+c^3\geqq 3abc,$$

facem $a=\frac{1}{r_a}$, $b=\frac{1}{r_b}$, $c=\frac{1}{r_c}$, avem:

$$\frac{1}{r_a^3}+\frac{1}{r_b^3}+\frac{1}{r_c^3}\geqq\frac{3}{r_a r_b r_c}$$

dar:

$$(7)\quad \frac{1}{r_a r_b r_c}=\frac{r}{s^2}=\frac{1}{p^2 r},$$

deci inegalitatea de mai sus devine:

$$\frac{1}{r_a^3}+\frac{1}{r_b^3}+\frac{1}{r_c^3}\geqq\frac{3}{p^2 r}.$$

De asemenea punând, $a=\frac{1}{h_a}$, $b=\frac{1}{h_b}$, $c=\frac{1}{h_c}$ și ținând seama de:

$$(8)\qquad \frac{1}{h_a h_b h_c}=\frac{R}{2s^2},$$

obținem inegalitatea:

$$\frac{1}{h_a^3}+\frac{1}{h_b^3}+\frac{1}{h_c^3}\geqq\frac{3R}{2s^2}.$$

Dacă însă facem $a=\operatorname{tg} A$, $b=\operatorname{tg} B$, $c=\operatorname{tg} C$ și ținem seama de identitatea:

$$\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C,$$

obținem inegalitatea:

$$(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C)(\operatorname{tg}^3 A+\operatorname{tg}^3 B+\operatorname{tg}^3 C)\geqq 3.$$

Analog avem:

$$\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)\times$$

$$\left(\operatorname{cotg}^3\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}^3\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}^3\frac{C}{2}\right)\geqq 3.$$

4. Fie inegalitatea:

$$x^4+y^4+z^4\geqq xyz(x+y+z),$$

în care dacă facem $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$, avem:

$$\frac{1}{r_a^4}+\frac{1}{r_b^4}+\frac{1}{r_c^4}\geqq\frac{1}{r_a r_b r_c}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right).$$

Ținând seama de (5) și (7), obținem inegalitatea:

$$\frac{1}{r_a^4}+\frac{1}{r_b^4}+\frac{1}{r_c^4}\geqq\frac{1}{s^2}.$$

Dacă însă facem $x=\frac{1}{h_a}$, $y=\frac{1}{h_b}$, $z=\frac{1}{h_c}$ și ținem seama de (5) și (8), avem:

$$\frac{1}{h_a^4}+\frac{1}{h_b^4}+\frac{1}{h_c^4}\geqq\frac{R}{2rs^2}.$$

5. Considerăm inegalitatea;

$$2(x^3+y^3+z^3)\geqq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x),$$

unde dacă facem $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$, avem:

$$(9)\quad 2\left(\frac{1}{r_a^3}+\frac{1}{r_b^3}+\frac{1}{r_c^3}\right)\geqq\frac{1}{r_a r_b}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)+$$

$$\frac{1}{r_b r_c}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)+\frac{1}{r_c r_a}\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}\right),$$

dar;

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r},$$

deci:

$$2\left(\frac{1}{r_a^3}+\frac{1}{r_b^3}+\frac{1}{r_c^3}\right)\geqq\frac{1}{r_a r_b}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}\right)+$$

$$\frac{1}{r_b r_c}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)+\frac{1}{r_c r_a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}\right).$$

Dacă însă ținem seama de relațiile (6), inegalitatea (9), devine:

$$\frac{1}{r_a^3}+\frac{1}{r_b^3}+\frac{1}{r_c^3}\geqq\frac{1}{r_a r_b h_c}+\frac{1}{r_b r_c h_a}+\frac{1}{r_c r_a h_b}.$$

Dacă însă facem, $x=\frac{1}{h_a}$, $y=\frac{1}{h_b}$, $z=\frac{1}{h_c}$, și ținem seama de:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r},$$

obținem inegalitatea:

$$2\left(\frac{1}{h_a^3}+\frac{1}{h_b^3}+\frac{1}{h_c^3}\right)\geqq\frac{1}{h_a h_b}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_c}\right)+$$

$$\frac{1}{h_b h_c}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_a}\right)+\frac{1}{h_c h_a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{h_b}\right).$$

Dacă împărțim inegalitatea considerată cu xyz, avem:

$$2\left(\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}\right)^2\geqq\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}$$

Dacă aci facem, $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$ și ținem seama de relațiile (6), avem:

$$\frac{r_b r_c}{r_a^2}+\frac{r_c r_a}{r_b^2}+\frac{r_a r_b}{r_c^2}\geqq\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c};$$

6. Fie inegalitatea:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\geqq 6,$$

Dacă facem $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$, avem:

$$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}\geqq 6.$$

însă:

$$a=\frac{2s}{h_a},\quad b=\frac{2s}{h_b},\quad c=\frac{2s}{h_c}$$

și:

$$p-a=\frac{s}{r_a},\quad p-b=\frac{s}{r_b},\quad p-c=\frac{s}{r_c},$$

așa că inegalitatea de mai sus devine:

$$\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}\geqq 3.$$

Această inegalitate se poate obține tot din inegalitatea algebrică considerată, și astfel.

Facem, $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$ și avem:

$$(10)\qquad \frac{\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}{\frac{1}{r_a}}+\frac{\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}}{\frac{1}{r_b}}+\frac{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}}{\frac{1}{r_c}}\geqq 6.$$

Insă:

$$\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_a};\quad \frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}=\frac{2}{h_b};\quad \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}=\frac{2}{h_c}$$

și înlocuind mai sus avem:

$$\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}\geqq 3,$$

adică tocmai inegalitatea căutată.

Dacă însă în (10) ținem seama de (5) obținem:

$$\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}}{\frac{1}{r_a}}+\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}}{\frac{1}{r_b}}+\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}}{\frac{1}{r_c}}\geqq 6.$$

7. In fine considerăm inegalitatea:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geqq\frac{3}{2}.$$

(„*Gazeta Matematică*“, an. XXXII, problema 3478), în care, dacă facem $x=\frac{1}{h_a}$, $y=\frac{1}{h_b}$, $z=\frac{1}{h_c}$, avem:

$$\frac{\frac{1}{h_a}}{\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}+\frac{\frac{1}{h_b}}{\frac{1}{r}+\frac{1}{h_c}}+\frac{\frac{1}{h_c}}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}}\geqq\frac{3}{2}.$$

Dacă însă ținem seama de (5), avem:

$$\frac{\frac{1}{h_a}}{\frac{1}{r}-\frac{1}{h_a}}+\frac{\frac{1}{h_b}}{\frac{1}{r}-\frac{1}{h_b}}+\frac{\frac{1}{h_c}}{\frac{1}{r}-\frac{1}{h_c}}\geqq\frac{3}{2}.$$

Analog, dacă facem $x=\frac{1}{r_a}$, $y=\frac{1}{r_b}$, $z=\frac{1}{r_c}$, avem:

$$(11)\qquad \frac{\frac{1}{r_a}}{\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}+\frac{\frac{1}{r_b}}{\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}}+\frac{\frac{1}{r_c}}{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}}\geqq\frac{3}{2},$$

și dacă ținem seama de (5), putem scrie:

$$\frac{\frac{1}{r_a}}{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}}+\frac{\frac{1}{r_b}}{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}}+\frac{\frac{1}{r_a}}{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}}\geqq\frac{3}{2}.$$

Dacă însă în (11) folosim formulele din (6), obținem inegalitatea:

$$\frac{h_a}{r_a}+\frac{h_b}{r_b}+\frac{h_c}{r_c}\geqq 3.$$

La fel putem stabili inegalități trigonometrice, plecând dela următoarea proprietate: „*Media aritmetică a mai multor numere este mai mare, sau cel puțin egală (când numerile sunt egale între ele), ca media lor geometrică*“ [1].

---

1) Redacția posedă o notă matematică, care tratează această chestiune, de la d-l *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), și care se va publica.

NOTE MATEMATICE

9. *Asupra unor identităţi algebrice.*

In articolul „*Cum se pot găsi unele identităţi prin desvoltarea determinanţilor*“, din R. M. T., an. II, s'au stabilit următoarele două identităţi:

$$a^3(b-c)(b-d)(c-d)-b^3(a-c)(a-d)(c-d)+$$
$$c^3(a-b)(a-d)(b-d)-d^3(a-b)(a-c)(b-c)=$$
$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

şi:

$$a^4(b-c)(b-d)(c-d)-b^4(a-c)(a-d)(c-d)+$$
$$c^4(a-b)(a-d)(b-d)-d^4(a-b)(a-c)(b-c)=$$
$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

Observ că ambele identităţi împărţite cu produsul:

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

se mai pot scrie:

$$(1)\qquad \sum \frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)}=1,$$

şi:

$$(2)\qquad \sum \frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}=a+b+c+d.$$

Imi propun să generalizez aceste identităţi, urmând calea indicată de d-l Maior *O. Bugeanu* în articolul sus menţionat.

Să considerăm determinantul:

$$\Delta_m=\begin{vmatrix} a_1^m & a_2^m & a_3^m & \dots & a_{n+1}^m & a_{n+2}^m \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_{n+1}^n & a_{n+2}^n \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_{n+1}^{n-1} & a_{n+2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} & a_{n+2} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

pe care îl desvoltăm după elementele liniei 1-a.

Avem:

$$(3)\qquad \Delta_m=a_1^m\Delta_1-a_2^m\Delta_2+a_3^m\Delta_3-\dots\pm a_{n+2}^m\Delta_{n+2}$$

unde:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_2^n & a_3^n & \dots & a_{n+2}^n \\ a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_{n+2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}=\begin{matrix} (a_2-a_3)\dots(a_2-a_{n+2}) \\ (a_3-a_4)\dots(a_3-a_{n+2}) \\ \dots\dots\dots \\ (a_{n+1}-a_{n+2}) \end{matrix}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1^n & a_3^n & \dots & a_{n+2}^n \\ a_1^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_{n+2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+2} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}=\begin{matrix} (a_1-a_3)\dots(a_1-a_{n+2}) \\ (a_3-a_4)\dots(a_3-a_{n+2}) \\ \dots\dots\dots \\ \dots(a_{n+1}-a_{n+2}) \end{matrix}$$

. . . . . .

$$\Delta_{n+2}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_2^n & \dots & a_{n+1}^n \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n+1}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}=\begin{matrix} (a_1-a_2)\dots(a_1-a_{n+1}) \\ (a_2-a_3)\dots(a_2-a_{n+1}) \\ \dots\dots\dots \\ (a_n-a_{n+1}). \end{matrix}$$

Observăm că determinantul Δ_m se anulează, pentru:

$$a_1=a_2,\ a_1=a_3,\dots a_1=a_{n+2},\ a_2=a_3,\dots a_{n+1}=a_{n+2},$$

deci se divide cu produsul:

$$(4)\quad (a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_{n+2})(a_2-a_3)\dots$$
$$(a_2-a_{n+2})\dots(a_{n+1}-a_{n+2}).$$

Câtul va fi un polinom omogen şi simetric în raport cu $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+2}$, de gradul $m-n-1$ şi al cărui coeficient va fi egal cu $+1$. Putem deci scri:

$$\Delta_m=(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_{n+2})$$
$$(a_2-a_3)\dots(a_2-a_{n+2})$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\dots(a_{n+1}-a_{n+2})\sum a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3}\dots a_{n+2}^{\alpha_{n+2}}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, iau toate valorile întregi pozitive sau nule, pentru care suma:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n+2} = m - n - 1.$$

Egalând acest rezultat cu cel obţinut mai sus, avem:

$$a_1^m \Delta_1 - a_2^m \Delta_2 + a_3^m \Delta_3 + \ldots \pm a_{n+2}^m \Delta_{n+2} =$$
$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_{n+2})$$
$$(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_{n+2})$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_{n+1} - a_{n+2}) \Sigma a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_{n+2}^{\alpha_{n+2}}$$

Ţinând seama de valorile lui $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{n+2}$, obţinute mai sus şi împărţind cu produsul (4), obţinem o identitate, pe care o putem scrie astfel:

$$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{a_i^m}{(a_i - a_1)(a_i - a_2)..(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})..(a_i - a_{n+2})} = \Sigma a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_{n+2}^{\alpha_{n+2}}.$$

Această identitate se găseşte şi în „*Culegere de Probleme*“, cap. IV“. Dacă aici facem:

$$m = 0, 1, 2, \ldots n,$$

obţinem identităţile lui *Euler* stabilite de d-l *V. Alaci,* în „R. M. T“, an. V. In fine dacă facem $m = n + 1 = 3$, obţinem identitatea (1), iar dacă facem $m = n + 2 = 4$, obţinem identitatea (2).

NICOLAE O. ZAHARIA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică.* vol. XXXIII, No. 8, Mai 1928. Rezultatul concursului „*Gazetei Matematice*“, din anul 1928, *G. Ţiţeica.* Sur les coniques inscrites à un triangle. *V. Thébault.* Aviaţia matematică (urmare), *Căpitan I. Linteş.*

2. *Revista de Ciencias,* ano XXXI, Lima-Peru, Ianuarie-Martie 1928. Teoria general de la flexion de les vigas, Dr. Ing. *Godofredo Garcia.* „Nueva mecánica relativista restringido“ o „Mécánica no Newtoniana de tipo eliptico“, Ing. *José Isaac Corral.* La mecánica Celeste de *Wronsky, Dr. Ing. Godofredo Garcia.*

3. Sur les noyaux symétriques et symétrisables généralisés, *Th. Angheluţă.* (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 186, p. 559, séance du 7 février 1928).

PROBLEME REZOLVATE

672. — *Să se stabilească identitatea:*

$$3^{3n} - 3^{3n-1} C_{6n}^2 + 3^{3n-2} C_{6n}^4 - \ldots \pm C_{6n}^{6n} = (-1)^n 2^{6n}$$
$$3^{3n-1} C_{6n}^1 - 3^{3n-2} C_{6n}^3 + 3^{3n-3} C_{6n}^5 - \ldots \pm C_{6n}^{6n-1} = 0.$$

NICOLAE G. BESCHEA

Dacă în formula lui *Moivre:*

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^p = \cos p\varphi + i \sin p\varphi, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

luăm:

$$\varphi = \frac{\pi}{6}, \quad p = 6n,$$

avem:

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)^{6n} = \cos n\pi + i \sin n\pi = (-1)^n,$$

sau:

$$(\sqrt{3} + i)^{6n} = (-1)^n 2^{6n}.$$

Dezvoltând binomul, găsim:

$$3^{3n} + C_{6n}^1 (\sqrt{3})^{6n-1} i + C_{6n}^2 3^{3n-1} - C_{6n}^3 (\sqrt{3})^{6n-3} i + C_{6n}^4 3^{3n-2} - \ldots + C_{6n}^{6n-1} \sqrt{3}\, i^{6n-1} + C_{6n}^{6n} (-1)^{3n} = (-1)^n 2^{6n}.$$

Egalând părţile reale şi imaginare, deducem:

$$3^{3n} - 3^{3n-1} C_{6n}^2 + 3^{3n-2} C_{6n}^4 - \ldots \pm C_{6n}^{6n} = (-1) 2^{2n}$$
$$3^{3n-1} C_{6n}^1 - 3^{3n-2} C_{6n}^3 + 3^{3n-3} C_{6n}^5 - \ldots \pm C_{6n}^{6n-1} = 0,$$

tocmai identităţile cerute.

Soluţii date de d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic Galaţi), *Gavrilescu Mircea* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti) şi *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi).

676*. — *Să se calculeze limita expresiei:*

$$E = \frac{\sqrt[3]{15x^3 - 7x^2 + 18x - 3} - \sqrt{2x^2 + 7x + 3}}{\sqrt[5]{x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 3x + 6} - \sqrt[4]{2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}}$$

pentru $x = 2$.

GH. V. NICOLAU

Pentru $x=2$, radicalii dela numărător luând valoarea 5, şi dela numitor, valoarea 2, expresia dată ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Atunci, putem scrie:

$$E=\frac{\frac{\sqrt[3]{R_1}-5}{x-2}-\frac{\sqrt{R_2}-5}{x-2}}{\frac{\sqrt[5]{R_3}-2}{x-2}-\frac{\sqrt[4]{R_4}-5}{x-2}},$$

şi deci:

$$(1)\qquad \lim_{x=2} E=\frac{\lim\limits_{x=2}\frac{\sqrt[3]{R_1}-5}{x-2}-\lim\limits_{x=2}\frac{\sqrt{R_2}-5}{x-2}}{\lim\limits_{x=2}\frac{\sqrt[5]{R_3}-5}{x-2}-\lim\limits_{x=2}\frac{\sqrt[4]{R_2}-5}{x-2}},$$

unde R_1, R_2, R_3, R_4 sunt respectiv polinoamele de sub radicali din E.

D r:

$$\lim_{x=2}\frac{\sqrt[3]{R_1}-5}{x-2}=\lim_{x=2}\frac{15x^3-7x^2+18x-128}{(x-2)\left(\sqrt[3]{R_1^2}+5\sqrt[3]{R_1}+25\right)}=$$

$$\lim_{x=2}\frac{15x^2+23x+64}{\sqrt[3]{R_1^2}+5\sqrt[3]{R_1}+25}=\frac{60+46+64}{3\times 25}=$$

$$\frac{170}{75}=\frac{34}{15}$$

$$\lim_{x=2}\frac{\sqrt{R_2}-5}{x-2}=\lim_{x=2}\frac{2x^2+7x-22}{(x-2)(\sqrt{R_2}+5)}=$$

$$\lim_{x-2}\frac{2x+11}{\sqrt{R_2}+5}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x=2}\frac{\sqrt[5]{R_3}-2}{x-2}=$$

$$\lim_{x=2}\frac{x^4-2x^3+8x^2-3x-26}{(x-2)\left(\sqrt[5]{R_3^4}+2\sqrt[5]{R_3^3}+4\sqrt[5]{R_3^2}+8\sqrt[5]{R_3}+16\right)}$$

$$=\lim_{x=2}\frac{x^3+8x+13}{\sqrt[5]{R_3^4}+2\sqrt[5]{R_3^3}+4\sqrt[5]{R_3^2}+8\sqrt[5]{R_3}+16}=\frac{37}{80}$$

$$\lim_{x=2}\frac{\sqrt[4]{R_4}-2}{x-2}=$$

$$\lim_{x=2}\frac{2x^3-3x^2+8x-20}{(x-2)\left(\sqrt[4]{R_4^3}+2\sqrt[4]{R_4^2}+4\sqrt[4]{R_4}+8\right)}=$$

$$\lim_{x=2}\frac{2x^2+x+10}{\sqrt[4]{R_4^3}+2\sqrt[4]{R_4^2}+4\sqrt[4]{R_4}+8}=\frac{5}{8}.$$

Inlocuind în (1) obţinem:

$$\lim_{x=2} E=\frac{\frac{34}{15}-\frac{3}{2}}{\frac{37}{80}-\frac{5}{8}}=-\frac{184}{39}.$$

Soluţii date de d-nii: *Boroianu D. C-tin*, *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Chirilă C. Ioan* (lic. Milit. Iaşi), *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focşani), *Demetrescu August* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Dinu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Gheorghiu Th. Mircea* (Tg.-Jiu), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Hohoi Vasile* (lic. Braşov), *Iancu D.* (lic. Naţional, Iaşi), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Micula O.* (lic. Timişoara), *Morţun Ar. C-tin* (Semin. Pedag., Iaşi), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Nicolau V. Gh.* (student, Bucureşti), *Panaitescu C. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iaşi), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pârvulescu M. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Popescu O. Adrian* (lic. Milit., Craiova), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

Altă soluţie. Pentru a afla limita lui E pentru $x=2$, aplicăm regula lui *Hôpital* şi avem:

$$\lim_{x=2} E=\lim_{x=2}\frac{\frac{45x^2-14x+18}{3\sqrt[3]{15x^3-7x^2+18x-3)^2}}-\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x+3}}}{\frac{4x^3-6x^2+16x-3}{5\sqrt[5]{(x^4-2x^3+8x^2-3x+6)^4}}-\frac{6x^2-6x+8}{4\sqrt[4]{(2x^3-3x^2+8x-4)^3}}}=\frac{\frac{170}{75}-\frac{15}{10}}{\frac{37}{80}-\frac{20}{32}}=-\frac{184}{39}.$$

Soluţii date de d-nii: *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ), *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Antonescu Aurel* (lic. Focşani), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Bratoşin Radu* (lic. Braşov), *Climescu C. Al.* (Semin. Pedag., Iaşi), *Crăciunescu N. Eugen*,, *Dăscălescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dimitriu A. Ioan* (lic. Galaţi), *Dobromirescu P.*, *Dumitrescu Nicolae* (lic. Timişoara), *Ettinger I. Alexandru* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Haim F. L.* (lic. P.-Neamţ), *Hamerak Carol* (Caransebeş), *Iacob Şt. Eugen* (Şc. Milit. de Artilerie), *Ionescu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Micula O.* (lic. Timişoara), *Negrea A.*

Mircea (lic. Brăila), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Petrică Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Râmniceanu I. Cristian*, *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Saur Ion* (lic. Arad), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Teodorescu Aurel* (lic. R.-Sărat), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara) și *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța).

690. — *Să se rezolve inegalitatea:*

$$\frac{6x^5+26x^4+46x^3+51x^2+29x-6}{4x^2+12x+9} < x^3+2x^2+5x+6.$$

CEZAR COSNITA

Multiplicând ambii membrii cu factorul pozitiv:

$$4x^2+12x+9=(2x+3)^2,$$

sensul inegalității se păstrează, și avem:

$$6x^5+26x^4+46x^3+51x^2+29x-6<(x^3+2x^2+5x+6)(4x^2+12x+9).$$

Dezvoltând parantezele și trecând totul în primul membru, găsim:

$$2x^5+6x^4-7x^3-51x^2-88x-60<0.$$

Să descompunem în factori primul membru.

El anulându-se pentru, $x=-2$ și $x=3$, urmează că se divide cu $(x+2)(x-3)$, și efectuând împărțirea, putem scri:

$$(x+2)(x-3)(2x^3+8x^2+13x+10)<0.$$

Cum ultimul factor se anulează pentru $x=-2$, adică se divide cu $x+2$, putem scri încă:

$$1) \qquad (x+2)^2(x-3)(2x^3+4x+5)<0.$$

Cum primul factor este totdeauna pozitiv și ultimul factor este tot pozitiv, oricare ar fi valoarea reală a lui x, căci are rădăcini imaginare, rezultă că inegalitatea (1) este echivalentă cu:

$$x-3<0$$
$$\therefore \quad x<3.$$

Inegalitatea dată, este deci satisfăcută numai pentru valori a lui x, mai mici ca 3.

Soluție dată de d-l: *Cioclov Gheorghe* (lic. T.-Severin).

Observare. S'au primit și alte soluții dar greșite.

703*. — *Să se dovedească că avem:*

$$\cos\frac{\log(7+4\sqrt{3})}{i}=\cos\frac{\log(7-4\sqrt{3})}{i}=7,$$

unde log. înseamnă logaritm neperian, iar $i=\sqrt{-1}$.

V. ALACI

Dacă în identitatea lui *Euler:*

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad (i=\sqrt{-1})$$

luăm:

$$x=\frac{\log(7\pm4\sqrt{3})}{i},$$

găsim:

$$(1) \quad \cos\frac{\log(7\pm4\sqrt{3})}{i}=\frac{e^{\log(7\pm4\sqrt{3})}+e^{-\log(7\pm4\sqrt{3})}}{2}$$

Observăm însă că:

$$(2) \quad \begin{aligned} e^{\log(7\pm4\sqrt{3})}&=7\pm4\sqrt{3} \\ e^{-\log(7\pm4\sqrt{3})}&=\frac{1}{7\pm4\sqrt{3}}=7\mp4\sqrt{3}, \end{aligned}$$

ceiace se învederează luând logaritmi neperiani în ambii membri. In virtutea egalităților (2), egalitatea (1) devine:

$$\cos\frac{\log(7\pm4\sqrt{3})}{i}=\frac{7\pm4\sqrt{3}+7\mp4\sqrt{3}}{2}=7.$$

Ambele egalități cerute, sunt astfel stabilite.

Observare. Analog se dovedește că avem mai general:

$$\cos\frac{\log(a\pm\sqrt{a^2-1})}{i}=a.$$

Soluții date de d-nii: *Balaban I. Gh.* (lic. Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Ettinger Alexandru*, *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați), *Iacob Șt. Eugen* (Șc. Milit., de Artilerie), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iași), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Petrică I. Ion* (Cluj), *Popescu Gh. Ovidiu* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași).

705. — *Să se demonstreze că:*

$$(12^{50}+21^{50})(5\cdot 80^{50}-6\cdot 7^{50})+$$
$$(7^{50}+80^{50})(6\cdot 12^{50}-5\cdot 21^{50})=\text{mult. } 11.$$

CEZAR COSNITA.

Vom demonstra mai general, că:

$$E=(a^n+b^n)(\alpha c^n-\beta d^n)+$$
$$(d^n+c^n)(\beta a^n-\alpha b^n)=\text{mult.}(\alpha+\beta).$$

Dezvoltând calculele, avem:

$$E=\alpha a^n c^n-\beta b^n d^n-\alpha b^n d^n+\beta a^n c^n=$$
$$a^n c^n(\alpha+\beta)-b^n d^n(\alpha+\beta)=$$
$$(\alpha+\beta)(a^n c^n-b^n d^n)=\text{mult.}(\alpha+\beta).$$

Pentru:

$$a=12,\quad b=21,\quad c=80,\quad d=7,$$
$$\alpha=5,\quad \beta=6 \text{ şi } n=50,$$

avem problema propusă.

Soluţie şi generalizare date de d-nii: *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Murăroiu I.* (lic. Braşov) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

Soluţia generalizată a autorului:

Considerăm determinantul:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a^n & d^n \\ b^n & c^n \end{vmatrix}.$$

Conform enunţului din nota matematică din „R. M. T.“, an. V, p. 5, avem:

$$(a^n+b^n)\begin{vmatrix} \alpha & d^n \\ \beta & c^n \end{vmatrix}+(c^n+d^n)\begin{vmatrix} a^n & \alpha \\ b^n & \beta \end{vmatrix}=$$
$$(\alpha+\beta)\begin{vmatrix} a^n & d^n \\ b^n & c^n \end{vmatrix},$$

sau:

$$(a^n+b^n)(\alpha c^n-\beta d^n)+(c^n+d^n)(\beta a^n-\alpha b^n)=$$
$$\text{mult. }(\alpha+\beta),$$

tocmai relaţia dată, generalizată.

Alte soluţii date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjan Petru* (lic. Caransebeş), *Avramescu Th. Ioan* (Caracal), *Bihoiu Ioan* (lic. Caransebeş), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Cercel Luciuliu* (lic. M-rea Dealu), *Davidsohn Moritz* (lic. Botoşani), *Dăscălescu Hristachc* (lic. Focşani), *Demetrescu N. August* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Gavrilescu Vasile* (lic. Braşov), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *GheorghiuTh. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Handler Gheorghe, Hascal Jenică, Iacob Şt. Eugen* (Şc. Milit. de Artilerie), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Marinescu Ecaterina* (lic. Târgovişte), *Mocănescu C. Ioan* (lic. Târgovişte), *Nichiforescu Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Oigenstein D.* (lic. Bălţi), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu Ion* (Învăţător, Fălticeni), *Popescu L. Nicolae* (lic. Buzeşti, Craiova), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu C. Virgiliu* (Şc. Electrotechnică-Nancy), *Râmniceann I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Roth Ladislau* (Caransebeş), *Sassu V. Ioan* (lic. Tg.-Mureş), *Saur Ioan* (lic. Arad) *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Savin Arnold* (lic. Focşani), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina) *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stoian C-tin*(lic. Botoşani), *Stratulat Paul* (Braşov), *Streit Ig. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Tomescu G. Nicolae* (lic. M-rea Dealu). *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) şi *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu).

Au mai trimes soluţii, dnii: *Arganini Victor* (lic. Piteşti), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Bâcicov Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov Victor* (lic. Tighina), *Berzovan Emil* (lic. Arad), *Ciancilian Agop* (lic. Braşov), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Hamparţun Gr.* (lic. Constanţa), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Negoescu I. Petre* (Şc. de Artilerie), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iaşi), *Popescu O. Adrian* (lic. Milit., Craiova), *Răşcanu C-tin* (lic. Cogâlniceanu, Iaşi), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti) şi *Stan I. Aurelian* (lic. Milit,, Iaşi).

706. — *Să se calculeze suma:*

$$S=11+121+1221+\ldots+122\ldots21.$$

EUGEN ŞT. IACOB

Suma dată se poate scri:

$$S=11(1+11+111+\ldots+111\ldots11).$$

Multiplicând cu 9, găsim:

$$9S=11(9+99+999+\ldots+999\ldots99)$$
$$\therefore\ S=\frac{11}{9}\left[(10-1)+(10^2-1)+\right.$$
$$\left.(10^3-1)+\ldots+(10^n-1)\right]=$$
$$\frac{11}{9}(10+10^2+10^3+\ldots+10^n-n)=$$
$$\frac{11}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right).$$

Deci:

$$S=\frac{11(10^{n+1}-9n-10)}{81}$$

n fiind numărul termenilor lui S.

Soluţii date de d-nii: *Arganidi Victor* (lic. Piteşti), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Băncilă Gh.* (Cluj), *Berzovan Emil* (lic. Arad), *Carp Ignat* (lic. Chişinău), *Chirilă S. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iaşi), *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Ettinger Alexandru, Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galaţi), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Marinaş Marin* (Şc. Milit. de Geniu), *Micula O.* (lic. Timişoara), *Morţun A. C-tin* (Semin. Pedag., Iaşi), *Murăroiu Ioan* (lic. Braşov), *Nichiforescu Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Oighenstein D.* (lic. Bălţi), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iaşi), *Panţu Z. Ioan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu D. Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Rapaport Leon, Râmniceauu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Răşcanu C-tin* (lic. Cogălniceanu Iaşi), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Sassu V. Ioan* (lic. Tg.-Mureş), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Silvian Emil* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic Milit., Iaşi), *Streit I. Victor* (lic. Internat., Iaşi), *Vâlceanu N. Iustin* (lic. Tg-Jiu) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic Constanţa).

S'a mai primit soluţii de la d-l *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealului), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova).

Generalizere dată de d-nii: *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galaţi), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

Să se calculeze suma

$$S = aa + aba + abba + \ldots + abbb\ldots ba.$$

Suma dată se poate scri:

$$S = a(11 + 101 + 1001 + \ldots + 100\ldots01) +$$

$$b(10 + 110 + 1110 + \ldots + 111\ldots10) =$$

$$a(10 + 10^2 + \ldots + 10^n + n) +$$

$$10b(1 + 11 + 111 + \ldots + 111\ldots1) =$$

$$a\left(n + \frac{10^{n+1} - 10}{9}\right) +$$

$$\frac{10b}{9}(10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1} - n + 1) =$$

$$\frac{a(10^{n+1} + 9n - 10)}{9} + \frac{10b(10^n - 9n - 1)}{81} =$$

$$\frac{1}{81}\left[9a(10^{n+1} + 9n - 10) + 10b(10^n - 9n - 1)\right].$$

710. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{2k+3}{k(k-1)(x-2)(k-3)} = \frac{2}{3} - \frac{n+1}{n^3 - 3n^2 + 2n}.$$

SECAROIU D-TRU

Fie:

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Conform formulei:

$$\sum_{k=4}^{n}\left[f(k+1) - f(k)\right] = f(n+1) - f(4)$$

(R. M. T., vol. II, pa g. 99)

avem:

$$\sum_{k=4}^{n}\left[\frac{k+1}{k(k-1)(k-2)} - \frac{k}{(k-1)(k-2)(k-3)}\right]$$

$$= \frac{n+1}{n(n-1)(n-2)} - \frac{4}{3.2.1},$$

sau încă:

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{(k-1)(k-2)}\left(\frac{k+1}{k} - \frac{k}{k-3}\right) =$$

$$\frac{n+1}{n^3 - 3n^2 + 2n} - \frac{2}{3}.$$

De unde deducem:

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{2k+3}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = \frac{2}{3} - \frac{n+1}{n^3 - 3n^2 + 2n},$$

tocmai identitatea cerută.

Soluţii date de d-nii: *Dăuciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Ettingher Alexandru, Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galaţi), *Ghişoiu I.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ionescu C., Ionescu Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Petrică I. Ioan* (Şc. de Conductori, Cluj), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

Observare, de d-l *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galaţi). Din suma de mai sus deducem imediat suma unei serii, anume:

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{2k+3}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = \frac{2}{3}.$$

711*. — *Fie x', x'', un sistem de soluţii ale ecuaţiunii:*

$$a\cos x + b\sin x = c.$$

Să se demonstreze că, $\operatorname{tg}(x' + x'')$ *este independentă de* c.

COL. GH. BUICLIU.

Prima soluție. Dacă x', x'' sunt soluții a ecuației date, avem:

$$a\cos x' + b\sin x' = c$$

$$a\cos x'' + b\sin x'' = c.$$

Prin scădere deducem:

$$a(\cos x' - \cos x'') + b(\sin x' - \sin x'') = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\cos x' - \cos x''}{\sin x' - \sin x''} = -\frac{b}{a}.$$

Transformând în factori, termenii fracției, avem:

$$\frac{-2\sin\frac{x'+x''}{2}\sin\frac{x'-x''}{2}}{2\sin\frac{x'-x''}{2}\cos\frac{x'+x''}{2}} = -\frac{b}{a}$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\frac{x'+x''}{2} = \frac{b}{a}.$$

Folosind formula care ne dă tangenta unui arc, în funcție de tangenta arcului pe jumătate, avem:

$$\operatorname{te}(x'+x'') = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x'+x''}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x'-x''}{2}} = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

De aci rezultă că, $\operatorname{tg}(x'+x'')$, este independentă de c.

Soluții analoage date de d-nii: *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Nichiforescu Gh.* (lic. Internat, Iași), *Rapaport Leon, Răşcanu C-tin* (lic. Cogâlnicranu, Iași) și *Streit Ig. Victor* (lic. Internat, Iași).

Soluția 2-a. Ecuația dată se poate scri:

$$(1) \qquad \cos x + \frac{b}{a}\sin x = \frac{c}{a}.$$

Insemnând cu φ arcul, astfel ca:

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a},$$

relația (1) devine:

$$\cos x + \operatorname{tg}\varphi\,\sin x = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \quad \cos x\cos\varphi + \sin\varphi\sin x = \frac{c}{a}\cos\varphi,$$

sau:

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi.$$

Dacă, $\alpha < \pi$ este arcul care satisface această ecuație, atunci soluțiile generale ale ei sunt:

$$x' = 2k\pi + \alpha + \varphi$$

$$x'' = 2k\pi - \alpha + \varphi.$$

De aci, deducem:

$$x' + x'' = 4k\pi + 2\varphi,$$

și deci:

$$\operatorname{tg}(x'+x'') = \operatorname{tg}2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Folosind relația (2), putem scri încă:

$$\operatorname{tg}(x'+x'') = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

Vedem dar, că $\operatorname{tg}(x'+x'')$, este independentă de c.

Soluții analoage date de d-nii: *Arganini Victor* (lic. Pitești), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Rapaport Leon* și *Răşcanu C-tin* (lic. Cogâlniceanu, Iași).

Soluția 3-a. Inlocuind în ecuția dată $\cos x$ și $\sin x$ în funcție de $\operatorname{tg} x$, putem scri:

$$\frac{a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} + \frac{b\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = c$$

$$\therefore \quad a + b\operatorname{tg} x = c\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Ridicând la patrat, avem:

$$(b^2-c^2)\operatorname{tg}^2 x + 2ab\operatorname{tg} x + a^2 - c^2 = 0.$$

Dacă $\operatorname{tg} x'$ și $\operatorname{tg} x''$ sunt rădăcinele acestei ecuații de gradul al 2-lea în $\operatorname{tg} x$, atunci relațiile între rădăcini și coeficienți, ne permit a scrie:

$$\operatorname{tg} x' + \operatorname{tg} x'' = -\frac{2ab}{b^2-c^2}$$

$$\operatorname{tg} x'\operatorname{tg} x'' = \frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}.$$

In virtutea acestor relații, putem scrie succesiv:

$$\operatorname{tg}(x'+x'') = \frac{\operatorname{tg} x' + \operatorname{tg} x''}{1-\operatorname{tg} x'\operatorname{tg} x''} =$$

$$-\frac{\frac{2ab}{b^2-c^2}}{1-\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}} = \frac{2ab}{a^2-b^2},$$

ceiace învederează că $\operatorname{tg}(x'+x'')$ este independent de c.

Soluții date de d-nii: *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Băncilă Gheorghe, Cincilian Agop* (lic. Brașov), *Climescu C. H.* (Semin. Pedag., Iași), *Gavrilescu Vasile* (lic. Brașov), *Gheorghiu Alexandru* (lic. Piatra-Neamț), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Groșescu T. C-tin* (Câmpina), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu Țiu D. C-tin* (llc. Milit., Craiova), *Oighenstein D.* (lic. Bălți), *Morțun Ar. C-tin* (Semin. Pedag., Iași), *Nazim Seid Hilmi* (Cluj), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iași), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit,, Iași).

PROBLEME PROPUSE

729*. — Se cere restul împărțirei expresiunei:

$$\sum_{p=2}^{p-1} k\,(p-k)^{p-1},$$

prin numărul prim p.

EMIL STEFANESCU

730. — Să se descompună numărul 42, în patru numere pozitive, care să fie în progresie aritmetică.

EUGEN ST. IACOB

731. — Fie patrulaterul ABCD înscris în cercul O și V un punct de pe cerc. Dreptele lui *Simson* ale punctului V în raport cu triunghiurile ABC, BCD, CDA, DAB formează patrulaterul complect MNPRST. Să se demonstreze că:

1°. Punctul lui *Miquel* al patrulaterului MNPRST este V.

2°. Patrulaterul lui *Miquel* al patrulaterului MNPRST e direct omotetic cu ABCD, centrul de omotetie în V, raportul de omotetie $\frac{1}{2}$.

ION C. VASILIU

732*. — Se dă patratul ABCD de latură a, cu centrul O și fie E, F, G, H mijloacele laturilor lui. Se prelungește AB, CB, EG, FH până în punctele I, J, K, L, astfel ca:

$$BI = BJ = GK = HL = \frac{a}{2}.$$

1°. Să se arate că dreptele IL și JK, trec prin centrul de greutate a triunghiului BEF.

2°. Dacă M, N, P, R sunt mijloacele lui AE, FC, OG, OH, iar S și T intersecțiile dreptelor IL, OM și JK, ON, să se arate că punctul de intersecție al dreptelor SP, RT se găsește pe diagonala DB.

3°. Insemnând cu Q și V intersecțiile dreptelor IL, JK și SP, RT, să se calculeze lungimea segmentului QV.

V. ALACI

733*. — Să se rezolve ecuația:

$$x^2 - px + q = 0,$$

știind că, coeficienții și rădăcinele sunt niște numere întregi și pozitive de o singură cifră, iar numărul format de coeficienți, scrișI unul după altul, este patratul numărului format de rădăcini, scrise una după alta.

CAP. I. LINTES

734. — Să se rezolve ecuația:

$$x^4 + 2ax^3 - a^3x = c.$$

SAVIN C. IOAN

735. — Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se rezolve ecuația:

$$x^3 - px^2 + r(r_a + r_b + r_c)x - pr^2 = 0.$$

In ce cazuri ecuația are o rădăcină dublă, sau triplă?

NICOLAE O. ZAHARIA

736. — Să se demonstreze relațiile:

1°. $$\sum \frac{1}{a^2}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{abc}\left(3p + abc\sum\frac{1}{a^2} - \frac{p\sum h_a}{2r}\right)$$

2°. $$\sum \frac{1}{a^2}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{abc}\left(\frac{p\sum h_a}{2r} - 3p\right),$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

COSTACHESCU V. C-TIN

INFORMAȚIUNI

Fie-care problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

— —

Nu se pot lua în seamă pentru problemele de *Concurs*, de cât acelea sosite la timp și anunțate în revistă.

Problemele propuse de corespondenții înscriși la *Concurs*, se socotesc cu numărul de puncte corespunzător, ca oricărui rezolvător înscris pentru *Concurs*.

— —

D-lui I. Sirches. Pentru „Questions d'Aritmétique par *B. Niewengloroski*, adresați-vă la „Librairie Vuibert", Boulevard Saint-Germain, 63; sau cereți oricărei librării din orașul D-stră să v'o aducă.

— —

D-lui Florescu B. Ioan (Slatina). Pentru „Buletinul Școalei Politechnice din Timișoara", adresați-vă direct Școalei Politechnice, abonamentul (600 lei).

— —

D-lui *Gheorghe Mihai* (Craiova). Vi se va socoti 1 punc pentru problema 632.

— —

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

— —

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

— —

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

— —

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

Sucursala Timişoara

ANUL VIII. 15 IULIE 1928 NO. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CEZAR COȘNIȚĂ. CATEVA INEGALITATI.
2. NOTE MATEMATICE, 10, 11.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 679, 682, 696, 709, 712, 713, 714, 715.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Polietcnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.

ANUL VIII — NO. 5. TIMISOARA, 15 IULIE 1928

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

CATEVA INEGALITAȚI

de CEZAR COSNITA.
(Liceul Bârlad)

La stabilirea inegalităților ce dau mai jos mă voi servi de cunoscuta proprietate, că: *Media aritmetică a n câtimi veritabile reale și pozitive este mai mare sau cel mult egală cu media lor geometrică.*

Să scriem aceasta pentru câtimile: x_1^n, x_2^n, $x_3^n \ldots x_{n-1}^n$, x_n^n:

$$\frac{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1^n \cdot x_2^n \ldots x_n^n}.$$

Extrăgând rădăcina din membrul al 2-lea și aducând la forma întreagă, obținem inegalitatea:

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + \ldots + x_n^n \geqq n\, x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Pentru $n = 2, 3, 4$ obținem succesiv inegalitățile:

(1) $$x_1^2 + x_2^2 \geqq 2 x_1 x_2,$$

inegalitate evidentă:

(2) $$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \geqq 3 x_1 x_2 x_3$$

(Culegere de Probleme, cap. IX, pag. 28).

(3) $$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 \geqq 4 x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Pentru câtimele: $x_1^{n-1} x_2$, $x_2^{n-1} x_3, \ldots x_n^{n-1} x_1$ și pentru:

$$x_1 x_2^{n-1},\quad x_2 x_3^{n-1}, \ldots x_n x_1^{n-1};$$
$$x_1 x_3^{n-1},\quad x_2 x_4^{n-1}, \ldots x_n x_2^{n-1};$$
$$x_1^{n-1} x_3,\quad x_2^{n-1} x_4, \ldots x_n^{n-1} x_2,$$

putem scrie de asemenea:

$$\frac{x_1^{n-1} x_2 + x_2^{n-1} x_3 + \ldots + x_n^{n-1} x_1}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1^n\, x_2^n \ldots x_n^n}$$

$$\frac{x_1 x_2^{n-1} + x_2 x_3^{n-1} + \ldots + x_n x_1^{n-1}}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1^n\, x_2^n \ldots x_n^n}$$

$$\frac{x_1 x_3^{n-1} + x_2 x_4^{n-1} + \ldots + x_n x_2^{n-1}}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1^n\, x_2^n \ldots x_n^n}$$

$$\frac{x_1^{n-1} x_3 + x_2^{n-1} x_4 + \ldots + x_n^{n-1} x_2}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1^n\, x_2^n \ldots x_n^n}$$

De unde rezultă inegalitățile:

$$x_1^{n-1} x_2 + x_2^{n-1} x_3 + \ldots + x_n^{n-1} x_1 \geqq n\, x_1 x_2 \ldots x_n$$
$$x_1 x_2^{n-1} + x_2 x_3^{n-1} + \ldots + x_n x_1^{n-1} \geqq n\, x_1 x_2 \ldots x_n$$
$$x_1 x_3^{n-1} + x_2 x_4^{n-1} + \ldots + x_n x_2^{n-1} \geqq n\, x_1 x_2 \ldots x_n$$
$$x_1^{n-1} x_3 + x_2^{n-1} x_4 + \ldots + x_n^{n-1} x_2 \geqq n\, x_1 x_2 \ldots x_n$$

Grupând în alte moduri câte 2 câtimile $x_1, x_2 \ldots x_n$ obținem alte inegalități asemănătoare.

Prin aceiași metodă ca mai sus putem demonstra și inegalități de forma:

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-1}^2 + x_2 x_3 \ldots x_n^2 + \ldots + x_n x_1 \ldots x_{n-2}^2 \geqq n\, x_1 x_2 x_4 \ldots x_n$$

$$x_1^2 x_2 \ldots x_{n-1} + x_2^2 x_3 \ldots x_n + \ldots + x_n^2 x_1 \ldots x_{n-2} \geqq n\, x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Dând lui n valori particulare: 2, 3, obținem inegalitățile:

(4) $$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 \geqq 3 x_1 x_2 x_3$$

(5) $$x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2 \geqq 3 x_1 x_2 x_3$$

. . . . . .

(6) $$x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 + x_3 x_4^3 + x_4 x_1^3 \geqq 4 x_1 x_2 x_3 x_4$$

(7) $$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_4 + x_4^3 x_1 \geqq 4 x_1 x_2 x_3 x_4$$

(8) $$x_1 x_3^3 + x_2 x_4^3 + x_3 x_1^3 + x_4 x_2^3 \geqq 4 x_1 x_2 x_3 x_4$$

(9) $x_1 x_2 x_3^2 + x_2 x_3 x_4^2 + x_3 x_4 x_1^2 + x_4 x_1 x_2^2 \geqq 4 x_1 x_2 x_3 x_4$

(10) $x_1 x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 x_4 + x_3 x_4^2 x_1 + x_4 x_1^2 x_2 \geqq 4 x_1 x_2 x_3 x_4$

(11) $x_1^2 x_2 x_3 + x_2^2 x_3 x_4 + x_3^2 x_4 x_1 + x_4^2 x_1 x_2 \geqq 4 x_1 x_2 x_3 x_4$.

Adunând (4) cu (5) obținem:

(a_1) $x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_2 x_3 (x_2 + x_3) + x_3 x_1 (x_3 + x_1) \geqq 6 x_1 x_2 x_3$.

(Culegere de Probleme, cap. IX, pag. 28).

Sau în general:

$$x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_2 x_3 (x_2 + x_3) + \ldots + x_n x_1 (x_n + x_1) \geqq 2n x_1 x_2 \ldots x_n$$

(a_1) se mai poate scrie:

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - 3 x_1 x_2 x_3 \geqq 6 x_1 x_2 x_3$$

De unde rezultă:

(a_1') $(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) \geqq 9 x_1 x_2 x_3$,

(Revista Matematică, problema 227).

Adunând (9) cu (10) și (11) și restrângând rezultatul, avem:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2 \geqq 16 x_1 x_2 x_3 x_4$$

și în general:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} + x_2 x_3 \ldots x_n + \ldots + x_n x_1 x_2 \ldots x_{n-2}) \geqq n^2 x_1 x_2 \ldots x_n,$$

ceiace constitue o generalizare a problemei 227.

Adunând (2) cu (4) și (5) și descompunând rezultatul în factori obținem inegalitatea:

(a_2) $(x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \geqq 9 x_1 x_2 x_3$.

Adunând (3) cu (6), (7) și (8), avem:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) \geqq 16 x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Și în general:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1}) \geqq n^2 x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Adunând inegalitatea (2) înmulțită cu 2, cu (4) și (5) înmulțite fiecare cu 3, avem inegalitatea:

(a_3) $(x_1 + x_2)^3 + (x_2 + x_3)^3 + (x_3 + x_1)^3 \geqq 24 x_1 x_2 x_3$.

Substituind în (a_3):

$x_1 + x_2 = 2c$; $x_2 + x_3 = 2a$; $x_3 + x_1 = 2b$,

de unde rezultă:

$x_1 = b + c - a$; $x_2 = a + c - b$; $x_3 = a + b - c$,

obținem inegalitatea remarcabilă:

(a_4) $a^3 + b^3 + c^3 \geqq 3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

Iată acum și câteva inegalități dintre elementele unui triunghiu oarecare, inegalități ce se deduc din cele algebrice date mai sus.

Dacă în inegalitatea (a_1') punem:

$x_1 = r_a$; $x_2 = r_b$; $x_3 = r_c$,

r_a, r_b, r_c, fiind razele cercurilor exînscrise unui triunghiu oarecare și ținând seama că:

$\Sigma r_a = 4R + r$; $\Sigma r_a r_b = p^2$; $r_a r_b r_c = p^2 r$,

avem:

$$p^2 (4R + r) \geqq 9 p^2 r.$$

Simplificând cu p^2, transpunând termenii și simplificând apoi cu 4, avem:

1. $R \geqq 2r$, relație propusă de d-l *Gr. Zapan*, în R. M. T., vol. II, pag. 110.

Tot în (a_1') punând:

$x_1 = h_a$; $x_2 = h_b$; $x_3 = h_c$,

h_a, h_b, h_c, fiind înălțimele unui triunghiu oarecare și având în vedere că:

$$\Sigma h_a h_b = \frac{2ps}{R} \quad \text{și} \quad h_a h_b h_c = \frac{2s^2}{R},$$

avem:

$$\frac{2ps}{R}(h_a + h_b + h_c) \geqq 9 \frac{2p^2 r^2}{R}.$$

Simplificând cu $\frac{2ps}{R}$, avem:

II. $h_a + h_b + h_c > 9r$, ceiace constitue o mică generalizare pentru problema 358, din R. M. T. Tot în (a_1') dacă punem:

$x_1 = \operatorname{tg} A$; $x_2 = \operatorname{tg} B$; $x_3 = \operatorname{tg} C$

și apoi:

$$x_1 = \operatorname{cotg} \frac{A}{2}; \quad x_2 = \operatorname{cotg} \frac{B}{2}; \quad x_3 = \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$$

și observăm că:

$$\Sigma \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C;$$

$$\Sigma \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2},$$

obținem inegalitățile:

III. $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \geqq 9$

IV. $\operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \geqq 9.$

De asemenea punând în (a_1'):

$$x_1 = \operatorname{tg} \frac{A}{2}; \quad x_2 = \operatorname{tg} \frac{B}{2}; \quad x_3 = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

și apoi:

$$x_1 = \operatorname{cotg} A; \quad x_2 = \operatorname{cotg} B; \quad x_3 = \operatorname{cotg} C$$

și observând că:

$$\Sigma \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \Sigma \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B = 1,$$

avem:

V, $\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geqq 9 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$

și:

VI. $\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C \geqq 9 \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C.$

De asemenea din (a_2) putem deduce:

VII. $\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C \geqq 9$

VIII. $\operatorname{cotg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{cotg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{cotg}^2 \frac{C}{2} \geqq 9.$

In fine în inegalitatea (a_3) dacă punem:

$$x_1 = \frac{1}{r_a}; \quad x_2 = \frac{1}{r_b}; \quad x_3 = \frac{1}{r_c}$$

și observăm că:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c} \ldots \text{etc.}$$

obținem inegalitatea:

IX. $$\frac{1}{h_a^3} + \frac{1}{h_b^3} + \frac{1}{h_c^3} \geqq \frac{3}{r_a r_b r_c}.$$

NOTE MATEMATICE

10. *Asupra triunghiurilor în care avem:*

$$a^n = b + c,$$

In cele ce urmează voiu da câteva relații mai interesante, cari leagă între ele diferitele elemente ale triunghiurilor în cari $a^n = b + c$; $n > 1$.

1. In orice triunghiu avem:

$$b = \frac{2s}{h_b}; \quad c = \frac{2s}{h_c}.$$

Inlocuind pe b și c în:

$$a^n = b + c,$$

avem:

$$a^n = \frac{2s}{h_b} + \frac{2s}{h_c},$$

însă:

$$a = \frac{2s}{h_a},$$

deci:

$$a^{n-1} \frac{2s}{h_a} = \frac{2s}{h_b} + \frac{2s}{h_c}.$$

Simplificând avem:

(1) $$\frac{a^{n-1}}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

2. Din relația:

$$r_a = \frac{s}{p - a},$$

ținând seama de $s = p r$; $p = \frac{a + b + c}{2}$ și $a^n = b + c$, deducem:

(2) $$r_a = r \frac{a^{n-1} + 1}{a^{n-1} - 1}.$$

3. Plecăm dela:

$$s = p r = \frac{a h_a}{2},$$

de unde se deduce:

$$(a + b + c) r = a h_a.$$

Inlocuind $b + c$ cu a^n, și simplificând cu a avem:

(3) $$h_a = r (a^{n-1} + 1).$$

4. Alăturând relațiile (2) și (3) obținem:

$$(a^{n-1}+1)\,r=(a^{n-1}-1)\,r_a=h_a.$$

5. In orice triunghiu există relația:

$$\frac{2}{h_a}=\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}. \tag{4}$$

Ținând seama de ultima relație obținută mai sus, avem relația:

$$\frac{2}{(a^{n-1}-1)\,r_a}=\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}, \tag{5}$$

care leagă razele cercurilor exînscrise.

6. Comparând relațiile (1) și (4), obținem relația:

$$\frac{a^{n-1}}{2}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

și ținând seama de (5), avem:

$$\frac{a^{n-1}}{(a^{n-1}-1)\,r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

7. Avem: $a^n=b+c$

deci: $a\,(a^{n-1}+1)=2\,p$

$$\therefore\quad p=\frac{a}{2}\,(a^{n-1}+1),$$

care ne dă semiperimetrul triunghiului în funcție de latura a.

8. Avem:

$$s=p\,r.$$

Am văzut însă că:

$$r=r_a\,\frac{a^{n-1}-1}{a^{n-1}+1}=\frac{h_a}{a^{n-1}+1}.$$

Rezultă deci:

$$s=\frac{a}{2}\,(a^{n-1}-1)\,r_a=\frac{a\,h_a}{2}=\frac{\sqrt[n]{b+c}}{2}\,h_a.$$

9. In orice triunghiu avem:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Sau:

$$\frac{a^n}{a^{n-1}\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Aplicând o proprietate cunoscută a proporțiilor avem:

$$\frac{a^n}{a^{n-1}\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C},$$

însă:

$$a^n=b+c,$$

deci:

$$a^{n-1}\sin A=\sin B+\sin C.$$

La fel, cum am obținut aceste relații, putem obține altele, combinând relațiile deja obținute, între ele, și ținând seama de $a^n=b+c$.

NICOLAE O. ZAHARIA

11. *O problemă de algebră.*

Printre chestiunile puse la examenul de admitere oral, la *École Centrale*, Paris 1926, este și următoarea:

In ce regiune a planului, trebue să se găsească punctul de coordonate $(\alpha,\ \beta)$, *pentru ca ecuația*

$$x^2-2\,\alpha\,x+\beta=0,$$

să aibă ambele sale rădăcini reale și cuprinse între 1 și 2. (A se vedea *Revuede Mathámatiques Spéciales,* 37^e année, No. 3, 1926).

Cred că nu e fără interes o soluțiune a acestei chestiuni. Să facem transformarea:

$$y=\frac{x-1}{x-2},\qquad \therefore\quad x=\frac{2y-1}{y-1}.$$

Ecuație propusă devine:

$$y^2(4\,\alpha-\beta-4)-y\,(6\,\alpha-2\,\beta-4)+(2\,\alpha-\beta-1)=0. \tag{1}$$

Pentruca ecuația propusă să aibă, ambele rădăcini reale și cuprinse între 1 și 2, trebue ca realizantul:

$$\alpha^2-\beta>0, \tag{1'}$$

și ecuația (1) să aibă rădăcini negative, adică suma rădăcinelor să fie negativă și produsul lor pozitiv:

$$\frac{6\,\alpha-2\,\beta-4}{4\,\alpha-\beta-4}<0,\qquad \frac{2\,\alpha-\beta-1}{4\,\alpha-\beta-4}>0. \tag{2}$$

Semnele expresiilor (2) sunt echivalente cu semnele expresiilor următoare:

$$A = (3\alpha - \beta - 2)(4\alpha - \beta - 4) < 0$$

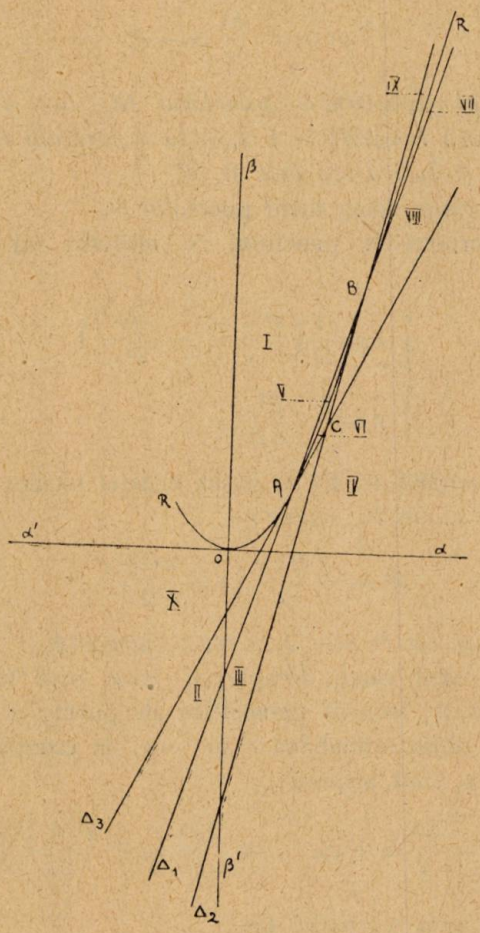
$$B = (2\alpha - \beta - 1)(4\alpha - \beta - 4) > 0.$$

Să punem, pentru o mai bună lămurire:

$$\Delta_1 \equiv 3\alpha - \beta - 4 \qquad R = \alpha^2 - \beta,$$

$$\Delta_2 \equiv 4\alpha - \beta - 4 \quad \text{şi,} \quad A = \Delta_1 \Delta_2,$$

$$\Delta_3 \equiv 2\alpha - \beta - 1 \qquad B = \Delta_2 \Delta_3.$$



Expresiile $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ reprezintă, în raport cu axele perpendiculare $O\alpha$, $O\beta$, drepte, iar $R = 0$ reprezintă o parabolă tangentă în O la $O\alpha$. Dreapta $\Delta_1 = 0$ taie parabola în punctele A(1, 1) şi B(2, 4), iar dreptele $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ sunt tangente la parabolă respectiv în B şi A. Parabola şi cele trei drepte împart planul în zece regiuni. Putem dresa tabloul:

Regiuni	R	Δ_1	Δ_2	Δ_3	A	B	Rădăcinele ecuaţiei în y.
I	−	−	−	−	+	+	imaginare.
II	+	−	−	+	+	−	una negativă, una pozitivă.
III	+	+	−	+	−	−	una negativă, una pozitivă.
IV	+	+	+	+	+	+	ambele pozitive.
V	−	+	−	−	−	+	imaginare.
VI	+	+	−	−	−	+	ambele negative.
VII	+	−	+	−	−	−	una negativă, una pozitivă.
VIII	+	+	+	−	+	−	una negativă, una pozitivă.
IX	+	−	−	−	+	+	ambele pozitive.
X	+	−	−	−	+	+	ambele pozitive.

Din citirea acestui tablou, se poate vedea lesne că singura regiune în care $A < 0$, $B > 0$ este regiunea VI şi prin urmare ecuaţia în y, pentru valorile lui (α, β) cuprinse în această regiune, are rădăcini negative şi deci ecuaţia în x are ambele rădăcini reale cugrinse între 1 şi 2 pentru α, β cuprinşi în regiunea VI.

VIRGIL COSNITA

BIBLIOGRAFIE

1. Gazeta Matematică, vol. XXXIII, No, 10, Iunie 1928. Sur les points inverses. *V. Thébault.* Diverse note asupra ortopolului, *V. Cristescu.* Sur quelques cercles du triangle, *N. Agronomof.* Probleme de geometrie infinitezimală, *Rod Nigulae Racles.*

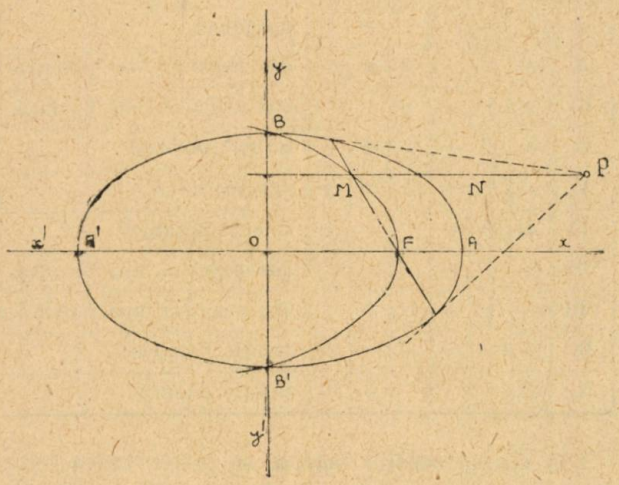
2. *La correction du temps, par l'équation tropique*, de *M. Gârneţeanu*, profesor la Soroca.

PROBLEME REZOLVATE

679. — *Se dă o conică şi prin unul din focarele ei se duce o dreaptă. Prin polul* P *al acestei drepte se duce o paralelă la axa mare sau axa transversă, care taie dreapta în* M. *Fie* N *mijlocul lui* MP. *Se cer locurile geometrice ale lui* M *şi* N. *Care e locul lui* N, *în cazul când*

conica este o parabolă ? Să se explice acest din urmă rezultat, geometric ?

NICOLAE I. MANOLESCU



Vom considera conicele cu focare.

1°. *Cazul elipsei.* Fie:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

ecuaţia elipsei raportată la axe şi F$(c, 0)$, unul din focare.

Ecuaţia unei drepte oarecare ce trece prin F, este:

$$y=\lambda(x-c),$$

sau:

$$\lambda x-y-\lambda c=0, \tag{1}$$

unde λ e variabil.

Ecuaţia unei polare la elipsă, ştim că este:

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}-1=0, \tag{2}$$

(x_1, y_1) fiind coordonatele polului. Cum polara (2) vrem să fie tocmai dreapta (1), trebue să avem:

$$\frac{\frac{x_1}{a^2}}{\lambda}=\frac{\frac{y_1}{b^2}}{-1}=\frac{1}{\lambda c},$$

de unde deducem:

$$x_1=\frac{a^2}{c},\quad y_1=-\frac{b^2}{\lambda c},$$

coordonatele polului P a dreptei (1).

Paralela dusă prin P la axa mare, are ca ecuaţie:

$$y=-\frac{b^2}{\lambda c}. \tag{3}$$

Coordonatele punctului M, se află rezolvând ecuaţiile dreptelor (1) şi (3) şi găsim:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{b^2}{\lambda^2 c}+c \\ y=-\dfrac{b^2}{\lambda c}. \end{cases}$$

Eliminând aci pe λ, găsim ecuaţia locului geometric al punctului M, anume:

$$y^2=-\frac{b^2}{c}(x-c). \tag{4}$$

Locul geometric al punctului M, *este deci o parabolă tangentă în* F$(c, 0)$ *la o paralelă la axa mică, şi care trece prin* B, B'.

Se găsim acum locul punctului N.

Coordonatele punctului N, mijlocul lui MP, sunt:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2+c^2}{c^2}-\dfrac{b^2}{\lambda^2 c}\right) \\ y=-\dfrac{b^2}{\lambda c}. \end{cases}$$

Eliminând aci pe λ, găsim ecuaţia locului geometric al lui N, anume:

$$y^2=-\frac{2b^2}{c}\left(x-\frac{a^2+c^2}{2c}\right). \tag{5}$$

Locul lui N *este deci tot o parabolă.*

In cazul când, dreapta ar trece prin focarul F'$(-c, 0)$, locurile geometrice ale punctelor M şi N, se obţin schimbând c în $-c$, în ecuaţiile (4) şi (5) şi sunt respectiv:

$$y=\frac{b^2}{c}(x+c),\quad y=\frac{2b^2}{c}\left(x+\frac{a^2+c^2}{2c}\right).$$

2. *Cazul iperbolei.* Fie:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

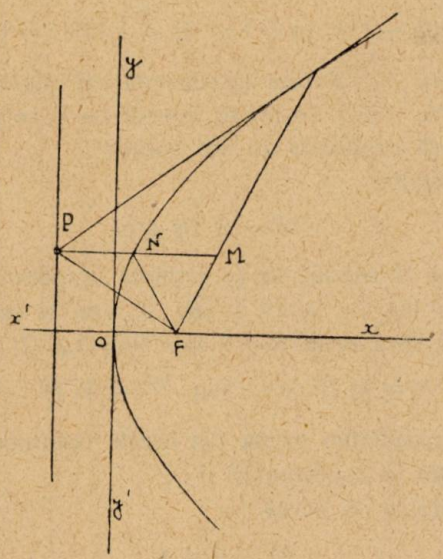
ecuaţia unei iperbole raportată la axe şi F$(c, 0)$ unul din focare.

Problema se tratează la fel ca în cazul elipsei, înlocuind peste tot pe b^2 prin $-b^2$, vom găsi dar:

(6) $y^2 = \frac{b^2}{c}(x - c)$, (7) $y^2 = \frac{2b^2}{c}\left(x - \frac{a^2 + c^2}{2c}\right)$

ecuațiile locurilor geometrice ale punctului M și N, care sunt tot niște parabole.

Dacă luăm focarul $F'(-c, 0)$, găsim aceleași ecuații (6) și (7) unde trebue să înlocuim c prin $-c$.



3°. *Cazul parabolei.* Fie:

(8) $$y^2 = 2px,$$

ecuația unei parabole raportată la axa sa și la o perpendiculară pe ea în vârful ei.

Ecuația unei drepte ce trece prin vârful său $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, este:

$$y = \lambda\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

sau:

(9) $$\lambda x - y - \frac{p\lambda}{2} = 0.$$

unde λ este arbitrar. Ecuația unei polare la parabolă, este:

$$y_1 y = p(x + x_1),$$

sau:

(10) $$px - y_1 y + px_1 = 0,$$

x_1, y_1 fiind coordonatele polului. Cum polara (10) vrem să fie tocmai dreapta (9), trebue să avem:

$$\frac{p}{\lambda} = \frac{y_1}{1} = -\frac{2x_1}{\lambda},$$

de unde deducem:

$$x_1 = -\frac{p}{2}, \quad y_1 = \frac{p}{\lambda},$$

coordonatele polului P a dreptei (9).

Paralela prin P, la axa parabolei, are ecuația:

(11) $$y = \frac{p}{\lambda}.$$

Coordonatele punctului M, se află rezolvind ecuațiile dreptelor (9) și (11) și găsim:

$$\begin{cases} x = \frac{p}{\lambda^2} + \frac{p}{2} \\ y = \frac{p}{\lambda}. \end{cases}$$

Eliminând aci pe λ, avem:

(12) $$y^2 = p\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Locul geometric al punctului M este o parabolă, cu vârful în focarul F, și având aceiași axă ca parabolă dată.

Să găsim acum locul punctului N.

Coordonatele punctului N, mijlocul lui MP, sunt:

$$\begin{cases} x = \frac{p}{2\lambda^2} \\ y = \frac{p}{\lambda}. \end{cases}$$

Eliminând aci pe λ, găsim locul geometric al lui N, anume:

(13) $$y^2 = 2px.$$

Locul geometric al lui N este deci tocmai parabola dată. Geometricește acest rezultat se explică astfel. MP fiind paralelă cu axa parabolei o întâlnește într'un punct N la distanță finită și în un punct N' la infinit. Cum punctele N', N, P, M formează o diviziune armonică, — căci P e polul dreptei MF, — rezultă că N conjugatul punctului N' dela infinit este la mijlocul lui PM. Punctul

N, mijlocul lui P M, era natural să fie pe parabola dată.

Soluții date de d-nii: *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați) *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Roman I. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași).

682*. — *Să se găsească numărul n așa ca 9^n să se obțină scriind unul după altul două numere care diferă cu n, știind că dacă se scade 1 din fiecare din aceste numere se obțin doi multipli consecutivi ai lui n.*

COL GH. BUICLIU.

Fie M și N două numere care diferă cu n și p un întreg oarecare. Condițiile enunțului sunt cuprinse în următoarele cazuri:

$$(1)\quad \begin{cases} 9^n = M\,10^p + N \\ M - N = n \\ M - 1 = k\,n \\ N - 1 = (k-1)\,n \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} 9^n = M\,10^p + N \\ M - N = n \\ M - 1 = (k-1)\,n \\ N - 1 = k\,n \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} 9^n = M\,10^p + N \\ N - M = n \\ M - 1 = k\,n \\ N - 1 = (k-1)\,n \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} 9^n = M\,10^p + N \\ N - M = n \\ M - 1 = (k-1)\,n \\ N - 1 = k\,n. \end{cases}$$

Problema este din acelea ce nu se pot rezolva în cazul general ci li se indică numai calea de urmat și li se stabilește soluția pentru câteva cazuri particulare.

Vom examina cazul (1). La fel se examinează și celelalte cazuri.

Prima egalitate (1), se poate scrie în funcție de k și n, ținând seamă de celelalte 3 egalități.

$$9^n = (k\,n+1)(10^p+1) - n$$

$$(1)\qquad \therefore\quad n + 9^n = (k\,n+1)(10^p+1)$$

și problema revine la a căuta pe M, N, n printre numerile $n + 9^n$, care sunt divizibile prin $10^p + 1$.

Dând lui p diferite valori întregi vom avea de rezolvat probleme analoage cu problema 3604 propusă de d-l *Col. Gh. Buicliu* în *Gazeta Matematică*, vol. XXXIII, pag. 159, unde se cer valorile lui n pentru care:

$$n + 9^n$$

se divide prin 101.

Pentru cazul $p = 2$ al egalității (1) ne vom referi la soluția ce se va da problemei citate din *Gazeta Matematică*.

Cea mai mică soluție ce se găsește este $n = 4$, pentru care avem soluția:

$$9^4 = 6561\,;\quad 65 - 61 = 4$$

$$65 - 1 = 16 \times 4\,;\quad 61 - 1 = 15 \times 4.$$

Pentru $p > 2$ vom întrebuința căi analoage.

Pentru $p = 1$ se poate dovedi pe o cale particulară că problema nu are soluție.

In adevăr:

$$(2)\qquad 9^n = M\,10 + N$$

arată că N trebuie să se termine neapărat cu terminația lui 9^n, adică 1 sau 9, cum N este de o singură cifră avem N = 9 sau N = 1 și (2) devine:

$$(3)\qquad 9^n = M\,10 + 9 \quad \text{sau} \quad 9^n = M\,10 + 1.$$

Să considerăm prima din aceste relațiuni și să o încadrăm în condițiunile (1).

Va trebui să avem:

$$(4)\qquad M - 9 = n$$

$$(5)\qquad M - 1 = k\,n$$

$$(6)\qquad 9 - 1 = (k-1)\,n.$$

Din (6) se vede că:

$$n = 2^\alpha \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ 2 \text{ sau } 3).$$

Cu aceasta, (4) dă valorile:

$$M = 9 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 10 \\ 13 \\ 17 \end{Bmatrix}$$

care duse pe rând în prima egalitate (3) ne arată că nu avem soluție.

La fel se arată că problema nu are soluție nici pentru a doua din egalitățile (3).

Au găsit soluția 6561 d-nii: *Arsene Al.* (lic. Milit., Iași), *Bâcicov V.* (lic. Tighina), *Bădescu A.* (lic. Caracal), *Cinsky C.* (lic. M-rea Dealu), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova) *David I.* (lic. Național, Iași), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Ganea V.* (lic. Lazăr, București), *Ghișoiu P.* (lic. Spiru Haret, București), *Ionescu C. C.* (lic. Milit., Iași), *Ionescu D. C., Mihaiu Gh.* (lic. Milit., Craiova),

Murărоiu I. (lic. Braşov), *Panaite T.* (lic. Milit., Iaşi), *Panţu I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu I.* (Crişteşti, Fălticeni), *Popescu St.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Râmniceanu C.* (lic. Milit., Iaşt), *Roman I.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Saur I.* (Arad), *Savin I.* (lic. Milit. Iaşi) şi *Secăroiu D.* (lic. (Braşov).

696*. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\prod_{k=1}^{6} \cos\frac{2k\pi}{13} \prod_{k=1}^{5} \cos\frac{k\pi}{6} + \prod_{k=1}^{7} \cos\frac{2k\pi}{15} \prod_{k=1}^{4} \cos\frac{k\pi}{5} = \frac{1}{2048}.$$

V. ALACI

Observăm că primul termen al identităţii este zero, din cauza factorului:

$$\cos\frac{3\pi}{6} = 0,$$

aşa că rămâne să stabilim numai identitatea:

$$(4) \qquad \prod_{k=1}^{7} \cos\frac{2k\pi}{15} \prod_{k=1}^{4} \cos\frac{k\pi}{5} = \frac{1}{2048}.$$

Folosim pentru aceasta formulele (9) şi (7) din articolul: *„Sume trigonometrice transformate în produse"*, R. M. T., No. 9, an. VII, anume:

$$(2) \qquad \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos nt = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \left(\cos t - \cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

$$(3) \qquad \sin nt = 2^{n-1} \sin t \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos t - \cos\frac{k\pi}{n}\right).$$

Dacă în relaţia (2) facem $t = \frac{\pi}{2}$, $n = 7$ şi în (3), $t = \frac{\pi}{2}$, $n = 5$, găsim:

$$\frac{1}{2} - 1 + 1 - 1 = -2^6 \prod_{k=1}^{7} \cos\frac{2k\pi}{15}$$

$$1 = 2^4 \prod_{k=1}^{4} \cos\frac{k\pi}{5},$$

De unde:

$$\prod_{k=1}^{7} \cos\frac{2k\pi}{15} = \frac{1}{2^7}, \quad \prod_{k=1}^{4} \cos\frac{k\pi}{5} = \frac{1}{2^4},$$

care înmulţite, ne dau:

$$\prod_{k=1}^{7} \cos\frac{2k\pi}{15} \prod_{k=1}^{4} \cos\frac{k\pi}{5} = \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2048}.$$

Identitatea (1) şi deci cea dată, este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Demetrescu N. August* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Drăguţ G. Vasile* (lic. Târgovişte), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galaţi), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu). *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Murărоiu I.* (lic. Braşov), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) şi *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu).

Au mai trimes soluţii, d-nii: *Coşniţă Cezar* (lic. Bârlad), *Dimitrie Al. Ioan* (lic. Galaţi), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit. Craiova), şi *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit. Craiova).

709. — *Dacă avem numerile* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, *şi dacă:*

$$\Sigma\alpha_1 = \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

avem şi relaţiile:

$$\sum\alpha_1^9 = \frac{9}{14}\sum\alpha_1^2\sum\alpha_1^7, \quad \sum\alpha_1^8 = \frac{1}{4}\left(\sum\alpha_1^2\right)^2\sum\alpha_1^4,$$

$$\sum\alpha_1^{11} = \frac{11}{18}\sum\alpha_1^9\sum\alpha_1^2, \quad \sum\alpha_1^5\sum\alpha_1^6 = \frac{5}{9}\sum\alpha_1^9\sum\alpha_1^2$$

EUGEN CRACIUNESCU

Soluţii date de d-nii: *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galaţi) şi *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi).

Fie: $\Sigma\alpha_1\alpha_2 = p, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 = q.$

Dacă privim numerile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ca rădăcinele unei ecuaţii de gradul al 5-lea şi ţinem seamă de relaţille date şi de notaţiile făcute, avem:

$$(1) \qquad x^5 + px^3 - q = 0,$$

ecuaţia cu rădăcinele $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$.

Să notăm, $S_i = \Sigma\alpha_1^i$ şi să calculăm suma puterilor asemeni a ecuaţiei (1). Folosim formulele cunoscute şi avem:

$S_1 + A_1 = 0, \quad \therefore \quad S_1 = 0$

$S_2 + A_1S_1 + 2A_2 = 0$ sau: $S_2 + 2p = 0, \quad \therefore \quad S_2 = -2p$

$S_3 + A_1S_2 + A_2S_1 + 3A_3 = 0, \quad \therefore \quad S_3 = 0$

$S_4 + A_1S_3 + A_2S_2 + A_3S_1 + 4A_4 = 0$

sau: $S_4 + p(-2p) = 0, \quad \therefore \quad S_4 = 2p^2$

$S_5 + A_1 S_4 + A_2 S_3 + A_3 S_2 + A_4 S_1 + 5 A_5 = 0,$

sau: $S_5 + 5q = 0, \quad \therefore \quad S_5 = -5q$

$S_6 + A_1 S_5 + A_2 S_4 + A_3 S_3 + A_4 S_2 + A_5 S_1 = 0,$

sau: $S_6 + 2p^3 = 0, \quad \therefore \quad S_6 = -2p^3$

$S_7 + A_1 S_6 + A_2 S_5 + A_3 S_4 + A_4 S_3 + A_5 S_2 = 0,$

sau: $S_7 - 5pq - 2pq = 0, \quad \therefore \quad S_7 = 7pq$

$S_8 + A_1 S_7 + A_2 S_6 + A_3 S_5 + A_4 S_4 + A_5 S_3 = 0,$

sau: $S_8 - 2p^4 = 0, \quad \therefore \quad S_8 = 2p^4$

$S_9 + A_1 S_8 + A_2 S_7 + A_3 S_6 + A_4 S_5 + A_5 S_6 = 0,$

sau: $S_9 + 7p^2 q + 2p^2 q = 0, \quad \therefore \quad S_9 = -9p^2 q$

$S_{10} + A_1 S_9 + A_2 S_8 + A_3 S_7 + A_4 S_6 + A_5 S_5 = 0,$

sau: $S_{10} + 2p^5 - 5q^2 = 0, \quad \therefore \quad S_{10} = 5q^2 - 2p^5$

$S_{11} + A_1 S_{10} + A_2 S_9 + A_3 S_8 + A_4 S_7 + A_5 S_6 = 0,$

sau: $S_{11} - 9p^3 q - 2p^3 q = 0, \quad \therefore \quad S_{11} = 11 p^3 q.$

Ţinând seamă de valorile găsite pentru $S_1, S_2, \ldots S_{11}$, putem scri evident:

$$S_9 = -9p^2 q = \frac{9}{14}(-2p)(7pq) = \frac{9}{14} S_2 S_7$$

$$S_8 = 2p^4 = \frac{1}{4}(2p)^2 2p^2 = \frac{1}{4} S_2^2 S_4$$

$$S_{11} = 11 p^3 q = \frac{11}{18}(-9p^2 q)(-2p) = \frac{11}{18} S_2 S_2$$

$$S_5 S_6 = 10 p^3 q = \frac{5}{9}(-9p^2 q)(-2p) = \frac{5}{9} S_9 S_2.$$

Avem astfel stabilite relaţiile cerute.

712. — *Să se stabilească identitatea:*

$$p^5 - \Sigma(p-a)^5 = 40 R^3 s \Sigma \sin^2 A,$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu oarecare.

ION Z. PANTU

In „C. de P." de d-l *Ioachimescu*, p. 7, este stabilită identitatea:

$$(x+y+z)^5 - (x+y-z)^5 - (x-y+z)^5 - (-x+y+z)^5 = 80\, x y z (x^2 + y^2 + z^2).$$

Dacă aci, luăm:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

şi ţinem seamă că, $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$, avem:

$$32\,[p^5 - (p-c)^5 - (p-b)^5 - (p-a)^5] = 80\, a b c (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\therefore \quad p^5 - \Sigma(p-a)^5 = \frac{80}{32} a b c (4 R^2 \Sigma \sin^2 A) = 10 R^2 a b c \Sigma \sin^2 A.$$

Cum: $a b c = 4 R s,$

rezultă încă:

$$p^5 - \Sigma(p-a)^5 = 40 R^3 s \Sigma \sin^2 A.$$

Soluţii date de d-nii: *Arganini Victor* (lic. Piteşti), *Cinielian Agop* (lic. Braşov), *Cioclov Gheorghe* (lic. T.-Severin), *Coşniţă Cezar* (lic. Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Gavrilescu Vasile* (lic. Braşov), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galaţi), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Eugen Şt. Iacob* (sublocot. de artilerie), *Livalet Victor* (lic. Kogălniceanu, Iaşi), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Petrică I. Ioan* (Şc. de Conductori, Cluj), *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), *Rapaport Leon* (lic. Kogălniceanu, Iaşi), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Savin C. Ion* (lic. Milit., Iaşi), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Sprinceană C. Ion* (lic. Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Streil Ig. Victor* lic. Internat, Iaşi) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

A mai dat soluţii d-l: *Lupu N.* (lic. Galaţi).

713*. — *Care număr zecimal înmulţit cu 6, dă un număr întreg scris cu trei cifre consecutive.*

CAP. I. LINTES

Numerile formate cu trei cifre consecutive, sunt următoarele:

102	123	234	345	456	567	678	789
120	132	243	354	465	576	687	798
210	213	324	435	546	657	768	879
201	231	342	453	564	675	786	897
	312	423	534	645	756	867	978
	321	432	543	654	765	876	987

Dintre acestea vom alege numai pe acelea care divizate cu 6, ne dau numere zecimale. Dar fiecare din aceste numere este divizibil cu 3, căci orice număr format cu trei cifre consecutive, a, $a+1$, $a+2$ este divizibil cu 3, căci suma cifrelor este:

$$3a + 3 = \text{mult. } 3.$$

Vom alege dar din tabloul de mai sus, numai pe acele numere, nedivizibile cu 2, anume:

201, 123, 213, 231, 321, 243, 423, 345, 435, 453, 543, 465, 645, 567, 657, 675, 765, 687, 867, 789, 879, 897, 987.

Impărțind aceste numere cu 6, obținem următoarele 23 soluții:

33,5; 20,5; 35,5; 38,5; 53,5; 40,5; 70,5; 57,5; 72,5; 75,5; 90,5; 77,5; 107,5; 94,5; 109,5; 112,5; 127,5; 114,5; 144,5; 131,5; 146,5; 149,5; 164,5.

Au dat toate soluțiile d-nii: *Arganini Victor* (lic. Pitești)' *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați), *Murăroiu Ioan* (lic. Brașov), *Panțu Z. Ioan* (lic. Lazăr, București), *Simionescu Grigore* (lic. Milit., Craiova), și *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați).

A dat 22 soluții, d-l: *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț).

Au dat 18 soluții, d-nii: *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Vâlceanu Justin* (lic. Tg.-Jiu) și *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu).

A dat 16 soluții, d-l: *Panaitescu Ion* (lic. Milit, Craiova),

Au dat 8 soluții, d-nii: *Almăjan Petru* (lic. Caransebeș), *Berzovan Emil* (lic. Arad), *Climescu C. Al.* (Semin. Pedag. Iași), *Cristescu Anghel* (lic. Oltenița), *Handler Gheorghe*, *Iancu David* (lic. Național Iași), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Jumanca Zeno* (Caransebeș), *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Pârvu Victor* (Caransebeș), *Răşcanu C-tin* (lic. Kogâlniceanu, Iași), *Roth Ladislau* (Caransebeș), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Streit Ig. Victor* (lic. Internat, Iași), *Vâlsănescu Viorel* (lic. Pitești) și *Vlad F. Aurel* (Buzău).

Au dat 6 soluții, d-nii: *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Licev Ioan* (Șc. Polit, Timișoara) și *Popescu O. Adrian* (lic. Milit. Craiova).

A dat 5 soluții, d-l *Hamparțum Gr.* (lic. Constanța).

Au dat 4 soluții, d-nii: *Bâcicov Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov Victor* (lic. Tighina), *Boroianu D. C-tin* (lic. Matei-Basarab, București), *Carp Ig.* (lic. Chișinău), *Rapaport Leon* (lic. Kogălniceanu, Iași), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), și *Sirchis I.* (lic. Tighina).

Au dat 3 soluții, d-nii: *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași) și *Stan Aurelian* (lic. Milit., Iași).

A dat o soluție, d-l: *Băncilă Gh.* (Cluj).

714*. — *Un număr de 5 cifre are ultima cifră 4. Dacă se ia această cifră dela dreapta și se așează la stânga numărului, se obține un număr mai mare cu 16 decât îndoitul numărului dat. Care este numărul dat?*

I. DIMITRIU-ARAD

Soluție aritmetică. Fie $abcd4$ numărul căutat. Conform enunțului, avem:

$$(1) \qquad 4abcd = 2 \times abcd4 + 16.$$

Dacă însemnăm: $abcd = N$,

egalitatea (1) devine:

$$40000 + N = 2(10N + 4) + 16$$

$$\therefore \quad 19N = 39976,$$

de unde scoatem:

$$N = abcd = 2104.$$

Deci, numărul căutat este, 21044.

Soluții date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjean Petru* (lic. Caransebeș), *Arganini Victor* (Pitești), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), *Băncilă Gh.* (Cluj), *Bâcicov Boris* (lic, Tighina), *Bâcicov Victor* (lic. Tighina). *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Carp Ig.* (lic. Chișinău), *Climescu C. Al.* (Semin. Pedag. Iași), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Gavrilescu Vasile* (lic. Brașov), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Hamerak C.* (Caransebeș), *Handler Gheorghe, Iacob Șt. Eugen* (Sub-locot. de artilerie), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Jumanca Zeno* (Caransebeș), *Levit Abram* (lic. Tighina), *Licev Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Panaite N. Theodor* (lic. Milit., Iași), *Panaitescu Ion* (lic. Milit., Craiova), *Panțu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Pârvu Victor* (Caransebeș), *Petrică I. Ioan* (Cluj), *Popescu O. Adrian* (lic. Milit., Craiova), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit.. Iași), *Roth Ladislau* (Caransebeș), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Simionescu Grigore* (lic. Milit., Craiova), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stănescu N. Pompiliu* (lic. Milit., Craiova), *Streit Ig. Victor* (lic. Internat, Iași), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vâlsănescu Viorel* (lic. Pitești), *Vlad Aurel* (Buzău), *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu) și *Zaharia O. Niculae* (lic. Constanța).

Au mai dat soluții, d-nii; *Băjenescu A. Pantelie* (lic. Caransebeș), *Boroianu D. C-tin* (lic. Matei-Basarab, București), *Lupu Nicolae* (lic. Galați) și *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București).

Soluție algebrică, dată de d-nii: *Berzovan Emil* (lic. Arad) și *Saur Ioan* (lic. Arad).

Insemnând cu x numărui dat, avem conform enunțului:

$$\frac{x-4}{10} + 40000 = 2x + 16$$

$$\therefore \quad 19x = 400000 - 4 - 160.$$

De unde: $$x = \frac{399836}{19} = 21044.$$

715. — *Să se rezolve ecuația:*

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + a = 0,$$

știind că între coeficienți avem relațiile:

$$a + b = c \quad \text{și} \quad a = \frac{d}{2}.$$

EUGEN ȘT. IACOB

In virtutea relațiilor de condiție, ecuația dată se poate scri:

$$a x^4 + b x^3 + (a + b) x^2 + 2 a x + a = 0$$

$$\therefore \quad a (x + 1)^2 + b x^2 (x + 1) + a x^4 = 0,$$

sau:

$$a \left(\frac{x + 1}{x^2}\right)^2 + b \left(\frac{x + 1}{x}\right) + a = 0,$$

care rezolvată în raport cu, $\frac{x + 1}{x^2}$, ne dă:

$$\frac{x + 1}{x^2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a^2}}{2 a}.$$

De aci, deducem:

$$(b \mp \sqrt{b^2 - 4 a^2}) x^2 + 2 a x + 2 a = 0,$$

deci:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 2 a (b \mp \sqrt{b^2 - 4 a^2})}}{b \mp \sqrt{b^2 - 4 a^2}}.$$

Soluții date de d-nii: *Aldea Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Licev Ion* (Șc. Polit. Timișoara), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) și *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu).

PROBLEME PROPUSE

737*. — Știind că p este un număr întreg, se cere să se găsească valoarea întreagă a lui q pentru care numărul $2pq + 1$ se divide prin numărul $2p + 1$.

COL. GH. BUICLIU

738. Se dă o dreaptă oarecare AB și un punct exterior C. Să se găsească un punct D, astfel ca perpendiculara pe CD în mijlocul său, să taie pe AB într'un punct P, așa ca $\sphericalangle CPA = 2 \sphericalangle DPB$.

VASILE TARAS

739. — Se consideră un triunghiu oarecare ABC. Prin G, centrul său de greutate se duc paralele la AB, BC și CA. Se obțin astfel punctele C_a, C_b; A_b, A_c; B_c, B_a pe laturile triunghiului. Dacă A_1, B_1, C_1 sunt picioarele medianelor lui ABC, să se arate că grupurile de ceviene: (AA_1, BC_b, CB_c), (BB_1, AC_a, CA_c), (CC_1, BA_b, AB_a), (AA_1, BA_b, CA_c), (BB_1, AB_a, CB_c), (CC_1, BC_b, AC_a), sunt concurente.

COSNITA CEZAR

740. — Să se găsească adevărata valoare a expresiunei:

$$E = \sqrt[4]{x^4 + x^3 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1},$$

pentru $x = \infty$.

SUBLOCOT. EUGEN ST. IACOB

741*. — Să se rezolve ecuația:

$$x^3 - 3 (m + 1) x + (m + 1)^2 = 0,$$

știind că:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3).$$

I. DUMITRIU-ARAD.

742*. — Să se stabilească identitatea:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{1 + a^2 - a x} - \operatorname{arc\,ctg} (x - a) = k \pi + \operatorname{arc\,tg} a,$$

unde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n, \ldots$

V. ALACI

743. — Dacă avem:

$$\cos t = \frac{a}{2}, \quad n = 6 p + 5,$$

se cere să se elimine a între polinoamele:

$$\sum_{k=1}^{n} a^{k-1} \sin k t = 0 \quad \text{și} \quad a^2 - a + 1 = 0.$$

GH. I. BALABAN

744. — Să se rezolve ecuația:

$$x^3 - \frac{r_a + r_b + r_r}{p} x^2 + x - \frac{S}{p^2} = 0,$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu oarecare.

AUREL PARVU

INFORMAȚIUNI

Fie-care problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Nu se pot lua în seamă pentru problemele de *Concurs,* de cât acelea sosite la timp și anunțate în revistă.

Problemele propuse de corespondenții înscriși la *Concurs,* se socotesc cu numărul de puncte corespunzător, ca oricărui rezolvător înscris pentru *Concurs.*

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

Sucursala Timişoara

ANUL VIII. 15 AUGUST 1928 No. 6

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. GHEORGHE GRADIN. INTRODUCEREA IMAGINARELOR IN GEOMETRIE.
2. NOTE MATEMATICE, 12, 13, 14.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 685, 686, 693, 694, 707.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Polietcnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.

ANUL VIII — No. 6. TIMISOARA, 15 AUGUST 1928

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

INTRODUCEREA IMAGINARELOR IN GEOMETRIE

de GHEORGHE GRADIN
Student Șc. Polit., Timișoara

In introducerea imaginarelor trebuește să ținem seamă de teorema fundamentală a ecuațiilor algebrice, sau *Teorema lui D'Alembert*" care spune:

„Toate ecuațiile algebrice de gradul m, cu coeficienți reali sau imaginari, au m rădăcini reale sau imaginare, distincte sau nu".

Să ne mai reamintim, că: *dacă o ecuațiune cu coeficenți reali are o rădăcină imaginară $a+bi$, multiplă de ordinul p, admite asemenea și rădăcina imaginară conjugată $a-bi$, cu acelaș ordin de multiplicitate.*

Dacă ținem seamă de cele spuse și dacă aplicăm imaginarele în domeniul *„Geometriei analitice"*, calculul rămâne exact, dacă introducem în parte sau în total cantități imaginare.

Rămâne deci bine stabilit că nu trebuește a insista să vedem cu ochii elementele geometrice imaginare inexistente, deși ele pot presupune relațiuni existente.

Puncte și drepte imaginare.

Fie:

$$[a+bi,\quad c+di]$$

două numere imaginare. Ele reprezintă coordonatele unui punct imaginar.

Punctele M și M′ de forma de mai jos:

$$M\,[a+bi,\quad c+di]$$

și:

$$M'\,[a-bi,\quad c-di],$$

se numesc puncte imaginare conjugate.

Ecuațiunea lineară cu coeficenți imaginari:

$$\Delta\equiv[A+Bi]x+[C+Di]y+E+Fi=0$$

reprezintă o dreaptă imaginară.

Dreapta de mai sus și dreapta a cărei ecuațiune este:

$$\Delta\equiv(A-Bi)x+(C-Di)y+E-Fi=0,$$

se numesc drepte imaginare conjugate.

Exemplu:

1. *Fiind date două puncte imaginare, conjugate să se afle depărtarea dintre ele.*

Fie punctele:

$$x_1=a+bi,\qquad x_2=a-bi$$
$$y_1=c+di,\qquad y_2=c-di.$$

Depărtarea este dată de expresia:

$$d^2=\left[(a+bi)\quad(a-bi)\right]^2+\left[(c+di)-(c-di)\right]^2$$

și deci:

$$d=\pm 2i\sqrt{b+d}$$

Deci: Depărtarea între două puncte imaginare conjugate, este tot o expresiune imaginară.

2. (1) *Centrul de greutate al unui sistem de puncte imaginare de mase:* $m_1,\ m_2\ldots m_n$:

$$\zeta_n=\frac{\sum_{\theta=1}^{n} m_\theta[a_\theta+b_\theta i]}{\sum_{\theta=1}^{n} m_\theta}\quad\text{și}\quad \eta_n=\frac{\sum_{\theta=1}^{n} m_\theta[c_\theta+d_\theta i]}{\sum_{\theta=1}^{n} m_\theta}$$

(2) Dacă presupunem:

$$m_1=m_2=\ldots=m_n,$$

avem:

$$\zeta_n'=\frac{\sum_{\theta=1}^{n}[a_j+b_j i]}{n}\quad\text{și}\quad \eta_n'=\frac{\sum_{\theta=1}^{n}[c_j+d_j i]}{n}.$$

Unde ζ_n și η_n sunt coordonatele în plan ale centrului de greutate.

Ultimele ξ'_n și η'_n sunt independente de mase și depind numai de coordonatele sistemului; de aceea el poartă numele de *centrul distanțelor mijlocii.*

3. *Depărtarea dela un punct imaginar* M *la o dreaptă imaginară este o expresiune imaginară.*

Fie punctul:

$$M[a+bi,\ c+di]$$

și dreapta:

$$\Delta \equiv (A+Bi)x+[C+Di]y+E+Fi=0$$

Depărtarea va fi:

$$d=\frac{(A+Bi)(a+bi)+(C+Di)(c+di)+E+Fi}{\pm\sqrt{(A+Bi)^2+(C+Di)^2}}$$

Făcând calculele, și dacă facem însemnarea:

$$R=E+Aa-Bb+Cc-Dd$$

$$\theta=aB+bA+cd+dc+F$$

$$R'^2=A^2-B^2+C^2-D^2,\quad T=AB+CD,$$

avem:

$$d=\frac{R+\theta i}{\sqrt{R'^2+2iT}}$$

4. *Condiția ca trei puncte imaginare să fie colineare.*

Aceasta se exprimă ca determinantul de mai jos să fie nul.

Adică:

$$\begin{vmatrix} a'+b'i & c'+d'i & 1 \\ a+bi & c+di & 1 \\ a-bi & c-di & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Desvoltând avem:

$$d(a'+a)-b(c'+c)+(b'd-d'b)i=0.$$

Notând:

$$\zeta=d(a'+a)-b(c'+c)$$

și:

$$\eta=b'd-d'b,$$

vom avea:

$$\xi+\eta i=0.$$

5. *Ținând seamă de expresiunea de mai sus și lucrând în aceleași condițiuni, avem că: suprafața unui triunghiu construit cu cele trei puncte, este:*

$$S_i=\mp\frac{1}{2}(\eta-\xi i).$$

6. *Unghiul dintre două drepte izotrope.*

Dreptele izotrope sunt de forma:

$$y-y_0=i(x-x_0)$$

și:
$$y-y_0=-i(x-x_0)$$

Unghiul dintre ele este:

$$\operatorname{tg} V=\frac{i-(-i)}{1+i(-i)}$$

și deci:
$$\operatorname{tg} V=i.$$

Cercul.

7. *Intersecția a două cercuri imaginare oarecari, ne dă un ax radical imaginar.*

Fie expresia cercurilor imaginare:

$$C\equiv x^2+y^2+2(A+Bi)x+2(C+Di)y+E+Fi=0$$

$$C'\equiv x^2+y^2+2(A'+B'i)x+2(C'+D'i)y+E'+F'i=0.$$

Expresia *axului radical* este:

$$2[(A-A')+(B-B')i]x+2[(C-C')+(D-D')i]y+E-E'+(F-F')i=0.$$

Dacă notațiile de mai sus le păstrăm, vom avea că expresia:

$$C+\lambda C'=0$$

reprezintă familia de cercuri imaginare — când λ variază între $\mp\infty$ — ce admite același ax radical imaginar.

8. *Două cercuri imaginare conjugate, admit un ax radical real.*

Fie cercurile:

$$C_1\equiv x^2+y^2+2(A+Bi)x+2(C+Di)y+E+Fi=0$$

$$C'_1=x^2+y^2+2(A-Bi)x+2(C-Di)y+E-Fi=0.$$

Axul radical este:

$$2i[Bx+Dy+F]=0,$$

de unde:

$$B x + D y + F = 0$$

Mai general:

$$C_1 + \lambda C_1' = 0.$$

Ecuaţia ultimă reprezintă familia de cercuri imaginare conjugate ce admit un ax radical real.

9. *Punctele dela infinit ale cercului sunt date de drepte izotrope.*

Aceasta se poate sesiza punând ecuaţia cercului sub forma omogenă şi făcând în ea $z = 0$. Vom obţine astfel:

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Această formă se poate exprima şi altfel:

$$(x + iy)(x - iy) = 0,$$

şi deci:

$$x + iy = 0$$

$$x - iy = 0.$$

Punctele date la infinit de dreptele izotrope se numesc puncte ciclice ale planului şi sunt independente de cercul considerat. *Toate cercurile trec deci prin două puncte ale planului numite puncte ciclice.* Acesta este de altfel motivul pentru care un cere este determinat complect numai prin trei *puncte* şi nu prin cinci.

NOTE MATEMATICE

12. *Sur quelques propriétés du simplex.*

On appelle par le mot „simplex" une ensemble de $n+1$ points dans l'espace de n dimensions (voir, par exemple *Proc. of the London Math. Soc., vol. XVIII, XIX; Bulletin of the Calcutta Mat. Soc., vol. XVIII etc.)*

La presente note a pour son but indiquer quelques propriétées élémentaires du simplex.

1. *Probléme. Trouver les rayons* r_1, r_2, r_3 *des cercles qui ont les centres sur les côtés* A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 *du triangle* $A_1A_2A_3$ *et qui touchent les côtés correspondantes* A_3A_1 *et* A_1A_2, A_1A_2 *et* A_2A_1, A_2A_3 *et* A_3A_2.

En désignant par a_1, a_2, a_3 les côtés du triangle $A_1A_2A_3$ et par O_1, O_2, O_3 les centres des cercles r_1, r_2, r_3, on trouve:

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta A_1A_2A_3 = \Delta A_1O_1A_2 + \Delta A_1O_1A_3 \\ \Delta A_1A_2A_3 = \Delta A_2O_2A_3 + \Delta A_2O_2A_1 \\ \Delta A_1A_2A_3 = \Delta A_3O_3A_1 + \Delta A_3O_3A_1 \end{cases}$$

ou:

$$(2)\quad \begin{cases} S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} r_1 (a_2 + a_1) \\ S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} r_2 (a_3 + a_1) \\ S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} r_3 (a_1 + a_2) \end{cases}$$

Par suite:

$$(3)\quad \begin{cases} r_1 = \dfrac{2S}{a_2 + a_3} \\ r_2 = \dfrac{2S}{a_3 + a_1} \\ r_3 = \dfrac{2S}{a_1 + a_2} \end{cases}$$

$(S = S_{A_1A_2A_2})$.

2. *Remarques:*

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{1}{h_2} + \dfrac{1}{h_3} \\ \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1}{h_3} + \dfrac{1}{h_1} \\ \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} \end{cases}$$

h, h_2, h_3 — les hauteurs du triangle.

De même:

$$(5)\quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{2}{r}$$

r — le rayon du cercle inscrit.

3. *Probléme. Trouver les rayons* r_1, r_2, r_3, r_4 *des sphères qui ont les centres sur les faces* $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ *du tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$ *et qui touchent les faces correspondantes.*

En désignant par a_1, a_2, a_3, a_4 les faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ et par O_1, O_2, O_3, O_4 les centres des sphères r_1, r_2, r_3, r_4 on trouve:

$$(6)\quad \begin{cases} \text{vol } A_1A_2A_3A_4 = \text{vol } A_1A_2A_3O_1 + \\ \qquad \text{vol } A_1A_3A_4O_1 + \text{vol } A_1A_4A_1O_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ou :

$$(7)\quad \begin{cases} V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{3} r_1 (a_2 + a_3 + a_4) \\ V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{3} r_2 (a_3 + a_4 + a_1) \\ V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{3} r_3 (a_4 + a_1 + a_2) \\ V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{3} r_4 (a_1 + a_2 + a_3) \end{cases}$$

Par conséquent :

$$(8)\quad \begin{cases} r_1 = \dfrac{3V}{a_2 + a_3 + a_4} \\ r_2 = \dfrac{3V}{a_3 + a_4 + a_1} \\ r_3 = \dfrac{3V}{a_4 + a_1 + a_2} \\ r_4 = \dfrac{3V}{a_1 + a_2 + a_3} \end{cases}$$

$(V = V_{A_1A_2A_3A_4})$.

4. *Remarques :*

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{1}{h_2} + \dfrac{1}{h_3} + \dfrac{1}{h_4} \\ \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1}{h_3} + \dfrac{1}{h_4} + \dfrac{1}{h_1} \\ \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{h_4} + \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} \\ \dfrac{1}{r_4} = \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} + \dfrac{1}{h_3}, \end{cases}$$

h_1, h_2, h_3, h_4 les hauteurs des tétraèdre.

De même :

$$(10)\quad \left\{ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{3}{r} \right.$$

r — le rayon de la sphère inscrit.

5. *Probléme. Trouver les rayons* $r_1, r_2, \ldots r_{n+1}$ *des hypersphères qui ont les centres sur les faces* $A_2A_3\ldots A_{n+1}, \ldots A_1A_2\ldots A_n$ *du simplex* $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ *et qui touchent les faces correspondantes.*

Il est clair que :

$$(11)\quad r_k = \frac{n V_{A_1A_2\ldots A_{n+1}}}{r_1 + r_2 + \ldots + r_{k-1} + r_{k+1} + \ldots r_{n+1}}$$

De même :

$$(12)\quad \frac{1}{r_k} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{h_{n+1}}$$

$$(13)\quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_{n+1}} = \frac{n}{r},$$

ou r est le rayon de la hypershère inscrit du simplex et h_1, $h_2, \ldots h_n$ sont les hauteurs du simplex.

N. AGRONOMOF
(U. S. S. R. Vladivostok)

13. *Calculul unei integrale.*

Voesc să calculez în două moduri diferite integrala :

$$J_n = \int \frac{x^n \sin x}{e^x}\, dx.$$

I. Valoarea integralei este evident de forma :

$$(1)\quad J_n = e^{-x}[(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a^{n-1} x + a_n)\cos x + (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n)\sin x].$$

Derivând expresia (1) şi identificând-o cu :

$$x^n \sin x \,.\, e^{-x},$$

găsim sistemele de ecuaţii :

$$(2)\quad \begin{cases} b_0 - a_0 = 0 \\ b_1 - a_1 + n a_0 = 0 \\ b_2 - a_2 + (n-1) a_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_k - a_k + (n-k+1) a_{k-1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_n - a_n + a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} -b_0 - a_0 = 1 \\ -b_1 - a_1 + n\,b_0 = 0 \\ -b_2 - a_2 + (n-1)\,b_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -b_k - a_k + (n-k+1)\,b_{k-1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -b_n - a_n + b_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Din aceste sisteme deducem imediat:

$$(4)\quad \begin{cases} a_k = \dfrac{(n-k+1)(b_{k-1}+a_{k-1})}{2} \\ b_k = \dfrac{(n-k+1)(b_{k-1}-a_{k-1})}{2} \end{cases}$$

$$a_0 = b_0 = -\frac{1}{2},\quad a_{-1} \equiv 0,\quad b_{-1} \equiv -1.$$

Din aproape în aproape, putem deci calcula integrala propusă. Putem proceda şi pe altă cale.

2. Fie acum:

$$I_n = \int \frac{x^n \cos x}{e^x}\,dx,\quad J_n = \int \frac{x^n \sin x}{e^x}\,dx$$

$$\therefore\quad I_n + i\,J_n = \int \frac{x^n(\cos x + i \sin x)}{e^x}\,dx = \int x^n e^{(i-1)x}\,dx = A_n.$$

Dacă integrăm prin părţi avem:

$$A_n = x^n \frac{e^{(i-1)x}}{i-1} - \frac{n}{i-1} A_{n-1}.$$

Această integrare este legitimă, conform teoriei funcţiilor de variabilă imaginară (A se vedea, *Goursat, Analyse Mathématique*, tome, II, page 38).

Deducem analog;

$$A_{n-1} = x^{n-1} \frac{e^{(i-1)x}}{i-1} - \frac{n-1}{i-1} A_{n-2}$$

$$A_{n-2} = x^{n-2} \frac{e^{(i-2)x}}{i-1} - \frac{n-2}{i-1} A_{n-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots,\quad \cdots\cdots$$

$$A_2 = x^2 \frac{e^{(i-1)x}}{i-1} - \frac{2}{i-1} A_1$$

$$A_1 = x \frac{e^{(i-1)x}}{i-1} - \frac{1}{i-1} A_0.$$

Din aceste formule de reducere, căpătăm imediat:

$$A_n = e^{-x}\left[\frac{x^n e^{ix}}{i-1} - \frac{n x^{n-1} e^{ix}}{(i-1)^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}e^{ix}}{(i-1)^3} - \cdots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2\,x\,e^{ix}}{(i-1)^n} \mp \frac{n!\,e^{ix}}{(i-1)^{n+1}}\right].$$

Insă avem lesne şi următoarele formule, care urmează a fi întrebuinţate:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$i - 1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\frac{e^{ix}}{i-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$\frac{e^{ix}}{(i-1)^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left[\cos\left(x - \frac{6\pi}{4}\right) + i \sin\left(x - \frac{6\pi}{4}\right)\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{e^{ix}}{(i-1)^{n+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}\left[\cos\left(x - \frac{3(n+1)\pi}{4}\right) + i \sin\left(x - \frac{3(n+1)\pi}{4}\right)\right].$$

Ţinând seamă de aceste valori, găsim imediat:

$$A_n = e^{-x}\left[\frac{x^n}{\sqrt{2}}\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{n x^{n-1}}{(\sqrt{2})^2}\cos\left(x - \frac{6\pi}{4}\right) + \ldots\right]$$

$$+ i e^{-x}\left[\frac{x^n}{\sqrt{2}}\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{n x^{n-1}}{(\sqrt{2})^2}\sin\left(x - \frac{6\pi}{4}\right) + \ldots\right].$$

Egalând părţile reale şi coeficienţii lui i, găsim valorile ambelor integrale I_n şi J_n.

VIRGIL COSNITA
Student matematici, Bucureşti

14. *Asupra unei integrale.*

Integrala de mai sus se poate calcul încă, folosind metodă derivării sub semnul integral. Pentru aceasta considerăm:

$$(1)\quad \int e^{-ax} \sin x\,dx = \frac{-e^{-ax}(a \sin x + \cos x)}{i + a^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{-(i+a)x}}{a+i} - \frac{e^{(i-a)x}}{a-i}\right),$$

uşor de stabilit integrând prin părţi.

Derivând de n ori în raport cu a, ambii membrii ai egalităţii (1) şi apoi luând $a = 1$, avem:

$$(2)\quad (-1)^n \int \frac{x^n \sin x}{e^x} = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{-(i+a)x}}{a+i} - \frac{e^{(i-a)x}}{a-i}\right]^{(n)}_{a=1},$$

Dacă notăm:

$$e^{-(i+a)x} = u, \quad (a+i)^{-1} = v$$

şi observăm că:

$$\left| u^{(k)} \right|_{a=1} = (-1)^k x^k e^{-(i-1)x}, \quad \left| v^{(r)} \right|_{a=1} = \frac{(-1)^r r!}{(1+i)^r}$$

atunci formula lui *Leibnitz*, ne permite a scri:

$$\left(\frac{e^{-(i+a)}}{a+i}\right)^{(n)}_{a=1} = (u \,.\, v)^{(n)}_{a=1} =$$

$$\left| u^{(n)} \,.\, v + C^1_n u^{(n-1)} v' + \ldots + C^1_n u' v^{(n-1)} + u v^{(n)} \right|_{a=1}$$

$$= (-1)^n e^{-(i+1)} \left[\frac{x^n}{1+i} + n \frac{x^{n-1}}{(1+i)^2} + \right.$$

$$\left. n(n+1) \frac{x^{n-2}}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right].$$

Inlocuind aci i prin $-i$, găsim şi:

$$\left(\frac{e^{(i-a)x}}{a-i}\right)^{(n)}_{a=1} = (-1)^n e^{(i-1)x} \left[\frac{x^n}{1-i} + n \frac{x^{a-1}}{(1-i)^2} + \right.$$

$$\left. n(n-1) \frac{x^{n-2}}{(1-i)^3} + \ldots + \frac{1}{(i-1)^{n+1}} \right].$$

Egalitatea (2) devine astfel:

$$(3) \quad \int \frac{x^n \sin x}{e^x} dx = \frac{e^{-x}}{2i} \left\{ x^n \left(\frac{e^{-ix}}{1+i} - \frac{e^{ix}}{1-i} \right) + \right.$$

$$n x^{n-1} \left[\frac{e^{-ix}}{(1+i)^2} - \frac{e^{ix}}{(1-i)^2} \right] + n(n-1) x^n \left[\frac{e^{-ix}}{(1+i)^3} \right.$$

$$\left. \left. - \frac{e^{ix}}{(1-i)^3} \right] + \ldots + \left[\frac{e^{-ix}}{(1+i)^{n+1}} - \frac{e^{ix}}{(1-i)^{n+1}} \right] \right\}$$

Cum:

$$\frac{e^{-ix}}{(1+i)^r} - \frac{e^{ix}}{(1-i)^r} = \frac{\cos x - i \sin x}{(-\sqrt{2})^r \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right)^r} -$$

$$\frac{\cos x + i \sin x}{(-\sqrt{2})^r \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)^r} = - \frac{2i}{(-\sqrt{2})^r} \sin \left(x - \frac{3r\pi}{4} \right)$$

rezultă:

$$\int \frac{x^n \sin x}{e^x} dx = e^{-x} \left[\frac{x^n}{\sqrt{2}} \sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) - \right.$$

$$\left. \frac{n x^{n-1}}{(\sqrt{2})^2} \sin \left(x - \frac{6\pi}{4} \right) + \ldots + \frac{(-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}} \sin \left(x - \frac{3(n+1)\pi}{4} \right) \right]$$

V. ALACI

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examen de fine de an

Lucrare scrisă de Geometrie Analitică

27 Iunie 1928

Serla I

I. Se dă triunghiul A B C şi un punct P în planul său. Fie A′, B′, C′ simetricele lui P faţă de mijlocul laturilor triunghiului A B C. Să se arate că A A′, B B′, C C′ sunt concurente.

Se pot lua ca axe două din laturile triunghiului A B C.

II. Se dau punctele A $(a, 0)$; B $(0, b)$; C (a, b) în care a şi b sunt pozitive. Se cere: 1° ecuaţia generală a conicelor circumscrise triunghiului O A B ştiind că polara lui C faţă de acele conice este paralelă cu A B: 2° normalele în A şi B la aceste conice se intâlnesc într'un punct M. Să se arate că locul geometric al lui M este o iperbolă care trece prin O, A, B şi C.

III. Să se găsească secţiunile ciclice ale cuadricei:

$$x^2 + 3yz - z^2 + 4x + 3y + z + 5 = 0$$

Seria II

I. Se dau axele oblice $x\,O\,y$. Fie E şi F două puncte fixe pe $O\,x$ şi $O\,y$. Se ia un punct D mobil pe dreapta fixă O C. Dreptele E D, O F se taie în M iar F D şi O E în N. Să se arate că M N trece printr'un punct fix.

II. Se dau punctele A $(a, 0)$, B $(0, -a)$ şi se cere: 1° ecuaţia conicelor care sunt tangente în A şi B la axele de coordonate. 2° care este locul vărfurilor acestor conice?

III. Să se găsească secţiunile ciclice ale cuadricei:

$$x^2 - 3yz - z^2 - 4x + 3z + 3 = 0$$

Seria III

I. Fie $O\,x$, $O\,y$ un sistem de axe dreptunghiulare. Se consideră un triunghiu variabil O A B cu laturile de direcţii date, şi în care suma laturilor OA, OB este constantă în aceste laturi sunt simetrice faţă de $O\,y$. Care este locul ortocentrului triunghiului O A B.?

II. Se dă punctul P $(0, p)$ mobil pe $O\,y$ şi punctele fixe A şi B simetrice faţă de O. Se cere: 1° ecuaţia generală a conicelor tangente în A şi B la P A şi P B. 2°. locul vârfurilor acestor conice sunt parabole, când P se mişcă pe $O\,y$.

III. Să se găsească secţiunile ciclice ale cuadricei:

$$x^2 - 3yz - z^2 - 4x + 3y + 2z + 2 = 0.$$

Seria IV

I. Fie C A B un triunghiu isoscel şi dreptunghic în A având mijloacele laturilor B C, C A, A B respectiv în A′, B′, C′. Se ia un punct P pe B C care se proectează în H şi K pe A B şi A C. Să se arate că triunghiul H A′ K

este dreptunghic şi că mijlocul lui H K se află pe B′ C′.

II. Se dă cercul:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

care taie axa Oy în A şi A′. Fie M şi N intersecţiile acestui cerc cu dreapta:

$$x - \lambda = 0$$

Se cere, atunci când dreapta M N se deplasează paralel cu ea însăşi: 1° ecuaţia iperbolelor echilatere care trec prin A, A′, M şi N. 2° să se demonstreze că focarele acestor iperbole descriu axa Ox şi cercul:

$$2x^2 + y^2 - 2R^2 = 0.$$

III. Să se găsească secţiunile ciclice ale cuadricei:

$$x^2 - 3yz - z^2 - 4x + 3y - z + 5 = 0.$$

(Va urma.)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIII, No. 11, Iulie 1928. Construcţia tangentei la o familie de curbe, de *M. Nicolau*. O metodă de ajustaj, de *Octav Onicescu*. Asupra curbelor plane, de Sublt. *Mihail I. Focşeneanu*.

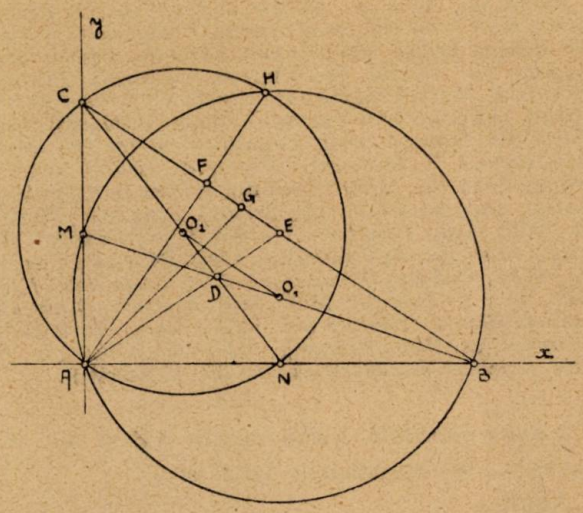
2. *Bulletin mathématique, de la Société Roumaine des Sciences*. Tom. 30, fascicule 2. Juillet-Décembre 1927. *G. Mittag-Leffler*, par *T. L. Ivar-Fredholm*, par *T. L.* Sur quelques fonctions convexes, par *Paul Montel*. Sur une propriété des fonctions holomorphes, par *D. Pompeiu*. Asupra mişcărilor rotatorii, de *V. Vâlcovici*. Equations différentielles fonctionnelles, par *C. Popovici*.

Sur les directions principales associées à une courbe, par *G. Vrânceanu*. La périodicité des opérations commutatives, par *Dan Barbilian*. Sur les transformations birationelles, par *Octav Onicescu*. Une propriété des fonctions entières, par *Octav Onicescu*. Sur la solution méromorphe d'une équation fonctionelle, par *Rodolphe Raclis*. Théoremes d'existance pour les équations fonctionnelles-diférentielles, par *Rodolphe Raclis*. Funcţiuni multiforme, de *Florin Vasilescu*. Procesele-verbale ale Societăţii din 29 Aprilie, 7 şi 21 Noembrie, 5 şi 19 Decembrie 1927. Bibliografie, de *T. L.*

PROBLEME REZOLVATE

685*. — *Dacă într'un triunghiu dreptunghic în* A *se descriu cercuri de diametru cât medianele* B M *şi* C N, *atunci acele cercuri au ca ax radical simediana corespunzătoare vârfului* A.

Ion Th. Popovici



Soluţie geometrică. Fie A B C un triunghiu dreptunghic în A şi O_1, O_2 centrele cercurilor având B M şi C N ca diametre. Evident că ambele cercuri trec prin A, unghiurile B A M, C A N fiind drepte.

Fie H al 2-lea punct de intersecţie a cercurilor O_1, O_2, atunci axul lor radical este A H. Trebuie să arătăm că A F este simediana unghiului A. Va fi de ajuns să dovedim că A F este perpendiculară pe B C, căci simediana unghiului drept al unui triunghiu dreptunghic este perpendiculară pe latura opusă. (R. M. T., an. VI, No, 7. problema 233).

In adevăr, ştim că coarda comună a două cercuri este perpendiculară pe distanţa centrelor, atunci A H sau A F este perpendiculară pe $O_1 O_2$, deci şi pe B C, căci $O_1 O_2$ este paralelă cu B C, şi iată de ce:

$$D O_1 = D B - O_1 B = \frac{2}{3} B M - \frac{1}{2} B M =$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} D B = \frac{1}{4} D B$$

$$D O_2 = D C - O_2 C = \frac{2}{3} C N - \frac{1}{2} C N =$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} D C = \frac{1}{4} D C.$$

De aci rezultă:

$$\frac{D O_1}{D O_2} = \frac{D B}{D C},$$

adică $O_1 O_2$ este paralelă cu B C.

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iași), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Ghișoiu Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Ionescu M. Haralambe* (Curtea de Argeș), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Mililt., Craiova), *Morțun A. C-tin* (Sem. Pedag., Iași), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Panaite N. Theodor* (lic. Milit., Iași), *Panaitescu Ion* (lic. Milit., Craiova), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Popescu O. Adrian* (lic. Milit., Craiova), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stoinescu N. Pompiliu* (lic. Milit., Craiova), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Șc. Polit., Leoben) și *Zaharia O. Ion* (lic. Constanța).

Soluție analitică. Luăm ca axe AB și AC. Fie $(b, 0)$, $(c, 0)$ coordonatele lui B și C.

Atunci:

$$M\left(0, \frac{c}{2}\right),\ N\left(\frac{b}{2}, 0\right),\ O_1\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{4}\right),\ O_3\left(\frac{b}{4}, \frac{c}{2}\right)$$

Cercurile cu centrele O_1 și O_2, care trec evident prin A, au ecuațiile:

$$x^2 + y^2 - b\,x - \frac{c}{2}\,y = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{b}{2}\,x - c\,y = 0.$$

Axul lor radical se obține scăzând aceste ecuații, avem:

$$\frac{b}{2}\,x - \frac{c}{2}\,y = 0$$

$$(1) \qquad \therefore \quad y = \frac{b}{c}\,x.$$

Pe de altă parte, ecuația dreptei BC, este:

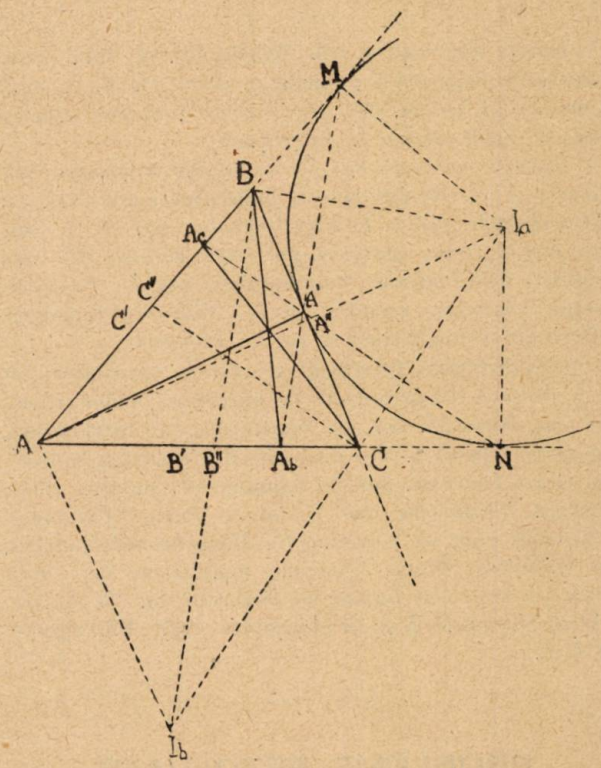
$$(2) \qquad \frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1.$$

Coeficienții unghiulari ai dreptelor (1) și (2), fiind $\frac{b}{c}$ și $-\frac{c}{b}$, produsul lor este -1, ceiace înseamnă că ele sunt perpendiculare, deci axul radical AH este perpendicular pe BC. Rămâne să arătăm că AF este simediana vârfului A. Dar știm, că simediana unghiului drept într'un triunghiu dreptunghic, este perpendiculara pe latura opusă (R. M. T., an. VI, No. 7, p. 104), deci AF este simediana vârfului A.

Soluții date de d-nii: *Crăciunescu Eugen* (Craiova), *Dimitriu A. Ioan* (lic. Galați), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeș), *Imre-Macri Ștefan* (lic. Lazăr, București), *Micula O.* (lic. Timișoara) *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Petrovici D-tru* (lic. Câmpina), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stan C.* (Șc. Polit., Timișoara), *Tudose Tănase* (lic. Câmpina).

686*. — *Fie* A′, B′, C′ *punctele de tangență ale cercurilor* I_a, I_b, I_c *exînscrise triunghiului* ABC, *cu laturile neprelungite. Paralele duse din aceste puncte la câte două din bisectoarele* AA″, BB″, CC″ *ale triunghiului, întâlnesc laturile în punctele* A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b. *Să se arate că grupele de drepte* (AA′, BA_b, CA_c), (AB_a, BB′, CB_c) (AC_a, BC_b, CC′), *sunt concurente.*

N. G. Botea



Fie M, N, punctele de tangență ale cercului I_a, cu laturile AB și AC. Dreapta MA′ e paralelă cu BB′, fiind ambele perpendiculare pe bisectoarea exterioară a unghiului B, deci MA′ este în prelungirea dreptei $A'A_b$. Analog punctele N, A′, A_c sunt colineare.

Observăm apoi. că:

(1) $MB = A'B,\ NC = A'C,\ AM = AN,$

căci sunt segmente de tangente duse din punctele B, C, A la cercul I_a. Fiindcă $A_c N$ e paralelă cu CC'', iar $A_b M$ e paralelă cu BB'', putem scri, ținând seamă de relațiile (1).

$$\frac{A_c A}{A_c C''} = \frac{NA}{A'C},\quad \frac{A_b A}{A_b B''} = \frac{MA}{A'B}.$$

Impărțind aceste relații și observând că:

$$\frac{NA}{MA} = 1,$$

avem:

(1) $$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{A_b A}{A_c A}\cdot\frac{A_c C''}{A_b B''} = 1.$$

Dar, $A'A_b$, fiind paralelă cu BB'', avem:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{A_b B''}{A_b C}.$$

Inlocuind în (1), găsim:

$$\frac{A_b A}{A_c A}\cdot\frac{A_c C''}{A_b C} = 1,$$

care se mai poate scri:

(2) $$\frac{A_b A}{A_b C}\cdot\frac{A_c C''}{A_c B}\cdot\frac{A_c B}{A_c A} = -1.$$

$A'A_c$ fiind paralelă cu CC'', avem:

$$\frac{A_c C''}{A_c B} = \frac{A'C}{A'B},$$

atunci (2) devine:

$$\frac{A_b A}{A_b C}\cdot\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{A_c B}{A_c A} = -1.$$

Această relație dovedește că dreptele (AA', BA_b, CA_c), sunt concurente. Analog demonstrăm concurența și a celorlalte grupe de drepte.

Soluții date de d-nii: *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț) *Crăciunescu N. Eugen* (Craiova), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova) *Drăguşeanu Octav* (lic. Milit., Iași), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Panaite N. Theodor* (lic. Milit., Iași), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit, Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași) *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași).

693*. — *Fie* ABC *un triunghiu oarecare.*

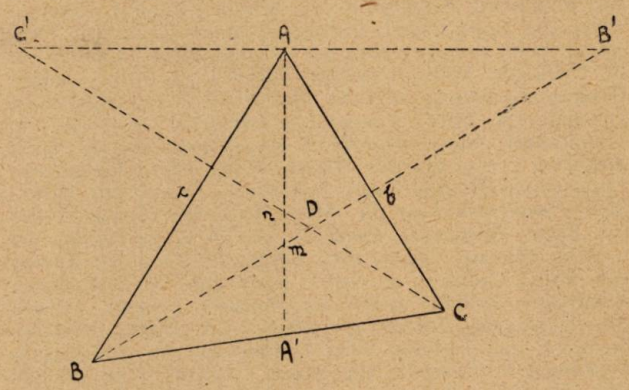
1°. *Să se demonstreze că înălțimele* Bb *și* Cc *formează cu bisectoarele unghiului* A, *triunghiuri isoscele.*

2°. *Să se demonstreze că:*

$$AB' \cdot nC' = AC' \cdot mB',$$

A' *fiind piciorul bisectoarei din* A, *iar* m, n, B', C' *fiind intersecțiile bisectoarelor lui* A, *cu înălțimele din* B *și* C.

Ion Th Popovici.



1°. Construim figura în condițiile problemei Observăm că triunghiurile $AC'c$ și $AB'b$ au câte un unghiu drept în c și b, apoi unghiurile din A egale ca complimentele unghiurilor egale formate din bisectoarea AA' cu laturile, urmează că și unghiurile din C' și B' sunt egale. Triunghiul $DB'C'$ e deci isoscel. Apoi triunghiurile $AC'n$ și $AB'm$, au și ele câte două unghiuri respectiv egale:

$$\sphericalangle C' = \sphericalangle B',\quad \sphericalangle C'An = \sphericalangle B'Am = 90^0,$$

urmează că:

$$\sphericalangle AnC' = \sphericalangle AmB'.$$

Cum:

$$\sphericalangle AnC' = \sphericalangle mnD,$$

ca opuse la vârf, rezultă că:

$$\sphericalangle mnD = \sphericalangle AmB' = \sphericalangle nmD,$$

deci și triunghiul Dmn este isoscel.

2°. Din asemănarea triunghiurilor AnC' și AmB', rezultă proporționalitatea laturilor:

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{mB'}{nC'}$$

sau:

$$AB' \cdot nC' = AC' \cdot mB',$$

ceiace trebuia stabilit.

Soluții date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Alexandrescu I. Ioan, Cismaru Ion* (lic. T.-Severin), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iași), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Diaconescu H. Aurel* (lic. Milit., Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dobromirescu P.* (Caracal), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit, Craiova), *Gheorghief N.* (Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Ghișoiu Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeș), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab. București), *Julea D. Vintilă* (lic. T.-Severin), *Jurca Corneliu* (Șc. Polit., Timișoara), *Mărășescu Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Morțun C-tin* (Semin. Pedag., Iași), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Neacșu V.* (Șc. Polit., Timișoara), *Oighenstein D.* (lic. Bălți), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iași), *Panaitescu Ioan* (lic. Milit., Craiova). *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Pavel H. Nicolae* (Craiova), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Popescu O. Adrian* (lic. Milit., Craiova), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Silaghi Aureliu* (lic. T.-Severin), *Simionescu Grigore* (lic. Milit., Craiova), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stoenescu N. Pompiliu* (lic. Milit., Craiova), *Șișu Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) și *Vonica C. Ion* (lic. Tg.-Jiu).

Generalizare. D-l *Panaite N. Teodor* (lic. Milit. Iași), a observat, *că în locul înălțimelor duse din* B *și* C *s'ar putea duce niște drepte care să formeze cu laturile opuse, unghiuri egale.* Punctele 1° și 2° se mențin. Demonstrație analoagă.

Observare. S'au anulat soluțiile trimese de cinci corespondenți (dela lic. Milit., Iași), care aveau aceiași redacție. Așa vom proceda și pe viitor.

694. — *Fie* P *punctul de întâlnire a trei ceviene dintr'un triunghiu* ABC. *Fie* M_1, M_2, M_3 *proecțiile unui punct din plan, pe cele trei ceviene. Să se dovedească că punctele* P, M, M_1, M_2, M_3 *sunt conciclice. Cum trebuie să fie cele trei ceviene, astfel ca prin unirea proecțiilor punctului* M, *să rezulte un triunghiu asemenea cu* ABC?

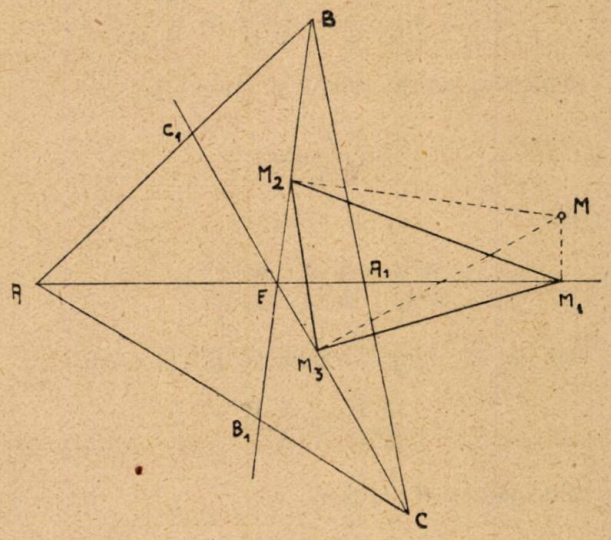
C-TIN V. COSTACHESCU

Construim figura conform enunțului și notăm cu A_1, B_1, C_1 picioarele cevienelor concurente în P. Observăm că patrulaterul PM_2MM_3 este inscriptibil, căci:

$$\sphericalangle PM_2M = \sphericalangle PM_3M = 90^0,$$

prin construcție. Punctul M_3 se găsește deci pe cercul P, M_2, M. De asemenea patrulaterul PM_2MM_1 este inscriptibil, căci:

$$\sphericalangle PM_2M = \sphericalangle PM_1M,$$



prin construcție. Punctul M_1 se află și el pe cercul P, M_3, M. Punctele P, M, M_1, M_2, M_3 sunt deci conciclice.

Să trecem acum la partea 2-a a problemei.

Patrulaterul $MM_1M_3M_2$ fiind inscriptibil, rezultă:

(1) $$\sphericalangle M_2MM_3 = \sphericalangle M_2M_1M_3,$$

$$\sphericalangle M_1MM_3 = \sphericalangle M_1M_2M_3.$$

Dar:

$$\sphericalangle M_2MM_3 = \sphericalangle BPC_1, \quad \sphericalangle M_1MM_3 = \sphericalangle CPA_1.$$

Inlocuind în (1), găsim:

$$\sphericalangle M_2M_1M_3 = \sphericalangle BPC, \quad \sphericalangle M_1M_2M_3 = \sphericalangle CPA_1,$$

rezultă că și:

$$\sphericalangle M_1M_3M_2 = \sphericalangle BPA_1.$$

Cu alte cuvinte, unghiurile triunghiului $M_1M_3M_3$ sunt respectiv egale cu unghiurile:

(2) $$\widehat{BPC_1}, \quad \widehat{CPA_1}, \quad \widehat{BPA_1},$$

formate de ceviene două câte două.

Acum, ca triunghiurile $M_1M_2M_3$ și ABC să fie asemenea, trebuie ca unghiurile, $\widehat{M_1}$, $\widehat{M_2}$, $\widehat{M_3}$ sau unghiurile (2) să fie respectiv egale cu unghiurile triunghiului ABC.

Cevienele trebuesc astfel duse, ca unghiurile făcute de ele două câte două, adică unghiurile (2) să fie egale cu unghiurile triunghiului ABC.

Când cevienele sunt tocmai înălțimele triunghiului ABC, unghiurile (2) sunt respectiv egale cu unghiurile $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ având laturile unora perpendiculare pe ale celorlalte și în acest caz triunghiurile $M_1M_2M_3$ și ABC sunt asemenea.

Observare. Pentruca triunghiurile $M_1M_2M_3$ și ABC să fie asemenea, am văzut că unghiurile:

$$\widehat{BPC_1},\quad \widehat{CPA_1},\quad \widehat{BPA_1},$$

trebuie să fie egale, într'o ordine oarecare, cu unghiurile $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ ale triunghiului ABC. Rezultă atunci că, unghiurile:

$$\widehat{BPC},\quad \widehat{APC},\quad \widehat{APB},$$

trebue să fie fiecare egal cu suma a câte două din unghiurile triunghiului ABC.

Vom descri deci pe două din laturile triunghiului ABC arce capabile de unghiuri egale cu suma a câie două din unghiurile lui. Intersecția acestor arce fixează poziția punctului P, pe unde trec cevienele.

Solutii date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăiuiu D-tru* (lic. Brașov) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași).

707*. — *Fie a și b distanțele dintre paralele* Δ, Δ_1 *și* Δ, Δ_2. *Dintr'un punct* A *pe* Δ_1, *se duce spre* Δ_2 *o dreaptă* AB, *care face cu* Δ_1, *unghiul* α. *In punctul* B *pe* Δ_2 *se ridică o perpendiculară pe* AB, *până întâlnește pe* Δ *în* C, *apoi în* C *se ridică o perpendiculară pe* BC, *până întâlnește pe* Δ_1 *în* D. *In* D *se duce o dreaptă, care face cu* Δ_1 *un unghiu* 2α *și pe ea se coboară din* A *o perpendiculară* AE. *Să se calculeze lungimea lui* AE.

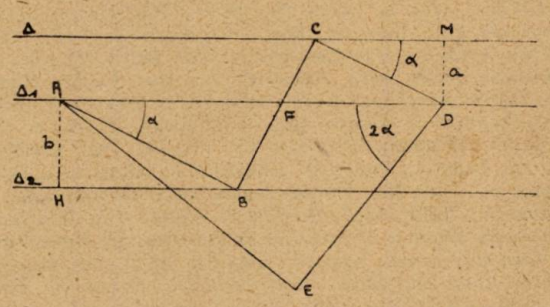
V. ALACI

Efectuăm construcția în condițiile problemei. Pentru a calcula pe AE, observăm că în triunghiul dreptunghic AED, putem scri:

$$AE = AD \sin 2\alpha. \tag{1}$$

Dar:

$$AD = AF + FD. \tag{2}$$



Din triunghiurile dreptunghice ABF și FCD, deducem însă:

$$AF = \frac{AB}{\cos\alpha},\quad FD = \frac{CD}{\cos\alpha}.$$

Atunci (2) devine:

$$AD = \frac{AB + CD}{\cos\alpha}. \tag{3}$$

Observăm încă, că în triunghiurile dreptunghice AHB și CDM, avem:

$$AB = \frac{b}{\sin\alpha},\quad CD = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Atunci (3) devine:

$$AD = \frac{a+b}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2(a+b)}{\sin 2\alpha}.$$

Inlocuind această valoare în (1) și simplificând, obținem:

$$AE = 2(a+b).$$

Observare. Fiindcă lungimea lui AE este independentă de unghiul α, rezultă că: *locul geometric al punctului* E, *când* α *variază este un cerc cu centrul în* A *și cu raza* $2(a+b)$.

Soluții date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Barna I. Leonida* (Șc. de Conductori, Cluj). *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Băncilă Gheorghe* (Cluj), *Brotman I.* (lic. Matei Basarab, București), *Cioclov Gheorghe* (lic. T.-Severin), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dobromirescu P.* (lic. Ca-

racal), *Dumitrescu Nicolae* (lic. Timişoara), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galaţi), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Hanţilă Florea* (lic. Caransebeş), *Iacob St. Eugen* (Sublocot. de Artilerie), *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeş), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Lupu Nicolae* (lic. Galaţi), *Micula O.* (lic. Timişoara), *Mihuţ Metodie* (lic. Caransebeş), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Nazim Hilmi* (Cluj), *Neacşu Vasile* (Şc. Polit., Timişoara), *Nichiforescu Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Negoescu I. Petre* (Şc. Milit, de Artilerie), *Oighenstein D.* (lic. Bălţi), *Panaite N. Teodor* (lic, Milit., Iaşi), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Petrică I. Ioan* (Cluj), *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), *Popescu Ion* (Învăţător, Fălticeni), *Popescu C. Virgiliu* (Şc. Electromecanică, Nancy), *Rapaport Leon* (lic. Kogălniceanu, Iaşi), *Răşcanu P. C-tin* (lic. Kogălniceanu, Iaşi), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Rivalet P. Victor* (lic. Kogălniceanu, Iaşi), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Sassu V. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Simionescu Grigore* (lic. Milit., Craiova), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Şoimu Ilie* (lic. Caransebeş), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic Milit., Iaşi), *Streit Ig. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vlad I. Aurel* şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

PROBLEME PROPUSE

683[1]). — Să se găsească numerile mai mici ca 1.000.000, care să fie în acelaşi timp patrate şi cuburi perfecte.

SUBLOCOT. EUGEN ST. IACOB

745*. — Să se găsească 2 patrate consecutive de câte 6 cifre ştiind că unul din ele începe cu numărul de 3 cifre cu care se termină celalt şi că cele 2 cifre dela mijlocul unuia din patratele căutate sunt egale cu 9.

COL. GH. BUICLIU

746. — Să se demonstreze că într'un triunghiu oarecare:

1°. Raza cercului circumscris este cuprinsă între a treia parte şi a şasea parte din perimetrul lui.

2°. Suma medianelor este cuprinsă între trei pătrimi şi trei doimi din perimetrul lui.

GH. TH. GHEORGHIU

1) In locul problemei 683 se propune sub acelaşi număr această problemă.

747. — In cercul O de rază $r=2\,m$, se înscrie triunghiul echilateral ABC. Tangentele în punctele A, B, C formează triunghiul $A'B'C'$. Dreapta OB întâlneşte cercul $A'B'C'$, în D. Fie E mijlocul arcului DA'. Dreapta $C'E$ tae pe OD în F. Să se calculeze.

1°. Lungimea segmentului FE.

2°. Să se arate ca patrulaterul $OFEA'$ este inscriptibil, să se calculeze suprafaţa lui şi lungimea lui OF.

I. MURAROIU.

748. — Se dă triunghiul ABC. Fie A' şi M respectiv picioarele bisectoarei şi medianei ce pleacă din vârful A pe BC. Din M ca centru şi cu MB ca rază se descrie un cerc; din A' ca centru şi cu $A'A$ ca rază se descrie un alt cerc, care taie pe primul în P' şi P. Se uneşte P cu P' şi fie I locul unde PP' tae pe BC. Se uneşte apoi P cu A'. Dreapta PA' întâlneşte cercul A' în N. Să se arate că figura $IPMN$ este un paralelogram.

AL. ZAMIRESCU PITESTI

749. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ x^2+y^2+z^2=56 \\ (x+y)(y+z)(z+x)=480. \end{cases}$$

CEZAR COSNITA

750. — Să se găsească un polinom $P(x)$ de gradul al 7-lea, cu condiţia ca: $P(x)-1$ să fie divizibil prin $(x-1)^4$, şi $P(x)-1$ să fie divizibil prin $(x+1)^4$.

I. N. POPESCU CLUJ

751*. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2-b^2}}{a-bi}\right)^n-\left(\frac{x-\sqrt{x^2-a^2-b^2}}{a+bi}\right)^n=0,$$

unde, $i=\sqrt{-1}$.

V. ALACI

INFORMAȚIUNI

Fie-care problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Nu se pot lua în seamă pentru problemele de *Concurs,* de cât acelea sosite la timp și anunțate în revistă.

Problemele propuse de corespondenții înscriși la *Concurs,* se socotesc cu numărul de puncte corespunzător, ca oricărui rezolvător înscris pentru *Concurs.*

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri nu mere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

Sucursala Timişoara

ANUL VIII. 15 SEPTEMBRIE 1928 NO. 7

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. C. IONESCU-BUJOR. EXTINDERI IN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI.
2. NOTE MATEMATICE, 15 16.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 691, 700, 701 721, 722.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.

ANUL VIII — NO. 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMBRIE 1928

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

EXTINDERI IN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

I.

SISTEM RAPORTAT UNUI PUNCT

de C. IONESCU-BUJOR
Student

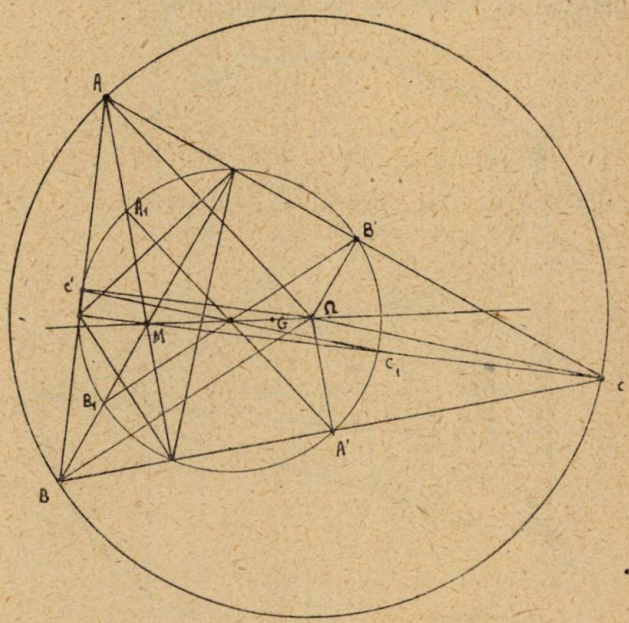
In prezenta geometrie a triunghiului sunt câteva puncte remarcabile între care s'au precizat relații și de care s'au legat proprietăți ale altor elemente. Relațiile ce leagă acele puncte și elemente mă fac să văd alcătuirea lor într'un sistem, al cărui element determinant, spun, *este ortocentrul*: pentrucă pornind dela ortocentru se obțin celelalte puncte și elemente remarcabile ale sistemului și apoi ortocentrul îmi dă posibilitatea unei extinderi, legând câte un sistem analog de puncte și elemente remarcabile fiecărui punct din planul triunghiului de referință, sistem ce-l voiu numi *raportat acelui punct*, astfel cum în prezenta geometrie a triunghiului sistemul de puncte și elemente remarcabile este raportat ortocentrului.

Voiu obține extinderea voită, având în vedere proprietățile sistemului raportat ortocentrului și proectându-le cilindric pe un alt plan neparalel planului inițial.

. . .

1°. *Conica circumscrisă și conica înscrisă triunghiului în sistemul de referință* M. Prin proecție, ortocentrul triunghiului inițial T_1, devine un oarecare punct M al noului triunghiu de referință T; numim punctul M punct de referință. Având în vedere paralelismul dintre înălțimi și mediatoare, cum și legile proecției cilindrice, voi putea enunța:

„Paralelele duse prin mijloacele laturilor triunghiului de referință la cevienele respective ale unui punct M, *sunt concurente în punctul* Ω, Ω *fiind central unei conice* Γ *circumscrisă triunghiului de referință“.*



Conica circumscrisă Γ cu centrul în Ω aparține sistemului M, așa cum cercul circumscris aparține sistemului ortic, aceleași construcții deducând centrele lor din punctele respective.

„In triunghiul A B C ≡ T, Ω *fiind centrul conicei circumscrisă — a sistemului* M — *iar* A′, B′, C′ *mijloacele laturilor triunghiului de referință, avem:*

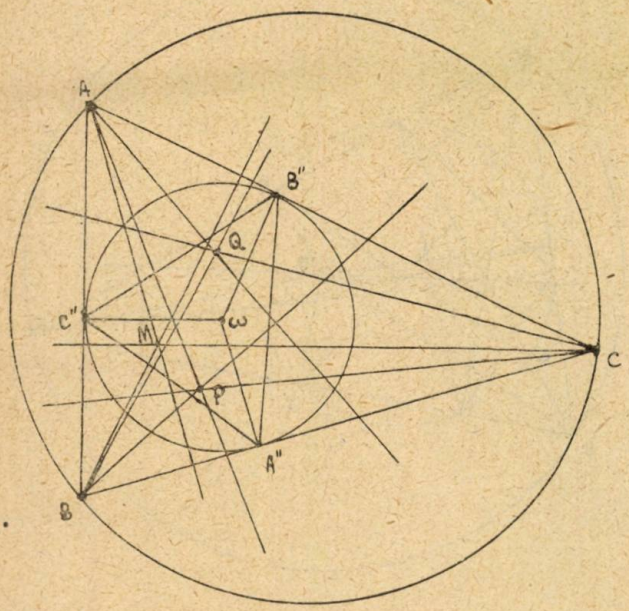
$$\overline{AM} = 2\,\overline{\Omega A'},\quad \overline{BM} = 2\,\overline{\Omega B'},\quad \overline{CM} = 2\,\overline{\Omega C'}.$$

Intr'adevăr; A_1, B_1, C_1 fiind mijloacele segmentelor A M, B M, C M, dreptele $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ sunt respectiv paralele cu Ω A, Ω B, Ω C — proprietate demonstrată în sistemul ortocentric al triunghiului T_1 și menținută în proecție; iar dreptele

$\Omega A'$, $\Omega B'$, $\Omega C'$ sunt paralele cu cevienele punctului M, prin construcție.

Printre conicele înscrise triunghiului T, există o conică al cărei centru ω este așa fel că $\omega A''$, $\omega B''$, $\omega C''$ — A'', B'', C'' fiind punctele de contact — sunt paralele cu A M, B M, C M. Această conică γ este proecția cercului înscris în triunghiul T_1 și aparținând sistemului ortocentric; o numesc conică înscrisă a sistemului M.

Se știe că dreptele AA'', BB'', CC'' se întâlnesc într'un punct numit punctul lui *Gergonne* și cum acest punct e strâns legat de punctul M, e punctul lui *Gergonne* în sistemul M.



2°. *Dreapta lui Euler și conica celor nouă puncte în sistemul* M. Dreapta lui *Euler* aparținând sistemului M este dreapta M Ω. Proecția centrelor de greutate a tuturor triunghiurilor din felurite plane, triunghiuri ce se proectează după T, este aceiași, punctul G și cum sistemele ortocentrice ale acelor triunghiuri, conțin drepte ale lui *Euler* trecând prin centrele de greutate respective, în proecție ele vor da proprietatea:

„Oricare ar fi punctul de referință, dreapta lui Euler trece prin centrul de greutate al triunghiului de referință“.

Proectând cercul lui *Euler*, vom găsi următorul rezultat:

„A B C și M fiind respectiv triunghiul și punctul de referință, triunghiul pedal al punctului M și triunghiul complimentar sunt înscrise în aceiași conică pe care se află și mijloacele segmentelor A M, B M, C M *și având drept centru mijlocul segmentului* M Ω.

Numim această conică, conica lui *Euler* a sistemului M.

3°. *Puncte inverse în sistemul* M. In sistemul raportat ortocentrului, punctele inverse se definesc prin izogonalitatea cevienelor lor corespunzătoare. Ori, acest fapt, cum se poate ușor verifica, atrage după sine următorul rezultat:

„Cevienele corespunzătoare a două puncte inverse, determină pe laturile respective ale triunghiului pedal al punctului lui *Gergonne* puncte izotomice“.

Proprietate, care definind complet două puncte inverse în sistemul ortocentric, are și calitatea de a fi proectivă. In cât, proectând așa fel ca ortocentrul să devină punctul M, putem enunța propoziția care definește două puncte inverse în sistemul M:

„Cevienele corespunzătoare a două puncte inverse — în sistemul M *— determină punctele izotomice pe laturile respective ale triunghiului pedal al punctului lui Gergonne aparținând acestui sistem“.*

In sistemul M, inversul lui M este centrul conicei circumscrise, Ω.

4°. *Triunghiuri podare în sistemul* M. Proecția cilindrică a sistemului legat de ortocentru conduce la rezultatul următor:

„Triunghiul podar al unui punct P, în sistemul M, se obține ducând prin P paralele cu cevienele punctului de referință și unind intersecțiile lor cu laturile corespunzătoare ale triunghiului de referință“.

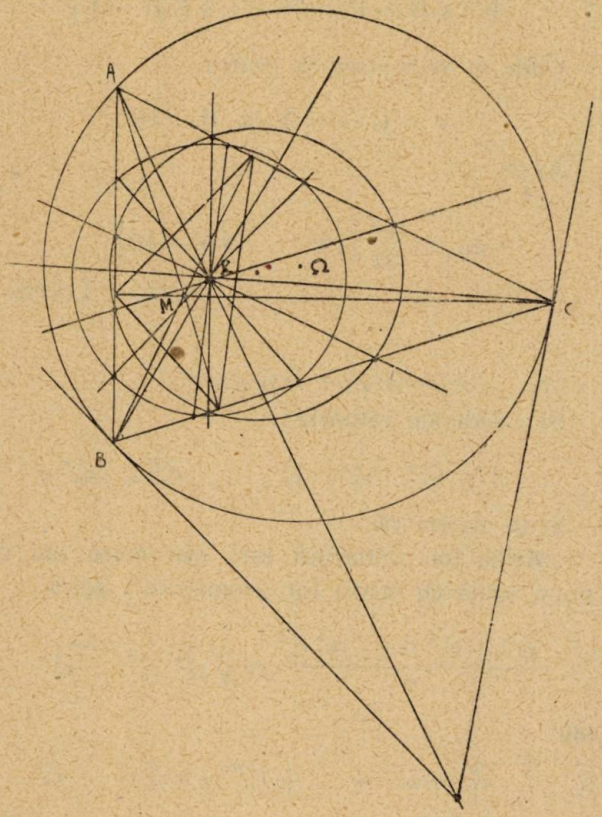
Iar o cunoscută proprietate a punctelor inverse din sistemul ortocentric se extind astfel:

„M fiind punctul de referință, triunghiurile podare a două puncte inverse P *și* Q *sunt înscrise în aceiași conică, al cărei centru este mijlocul segmentului* P Q“.

5°. *Punctul lui Lemoine și simedianele sistemului* M. M fiind punctul de referință, inversul centrului de greutate este punctul lui *Lemoine*, iar

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

cevienele sale sunt simedianele sistemului. Acestea fiind spuse, proprietăți ale simedianelor cunoscute în sistemul ortocentric se extind astfel:



„Simedianele sistemului M, *trec prin mijloacele laturilor triunghiului pedal al punctului* M".

„Simediana vârfului A *și paralelele duse prin* B *și* C *la laturile respective ale triunghiului pedal al punctului* M *sunt concurente în polul laturii* BC, *relativ la conica circumscrisă a sistemului; punct de referință fiind* M".

Proprietatea precedentă se bazează pe următoarea:

„Tangentele duse prin vârfurile triunghiului de referință la o conică circumscrisă Γ, *aparținând sistemului* M, *sunt paralele cu laturile corespunzătoare ale triunghiului pedal al punctului* M.

6°. *Conice remarcabile în sistemul* M.

„Paralelele cu laturile triunghiului de referință duse prin punctul de întâlnire al cevienelor ce trec prin mijlocul laturilor triunghiului pedal al punctului M, *adică prin punctul lui Lemoine* K, *tae laturile triunghiului de referință în șase puncte situate pe o conică având drept centru mijlocul segmentului* ΩK".

Numesc această conică, prima conică a lui *Lemoine* în sistemul M.

„Paralelele cu laturile triunghiului pedal al punctului de referință duse prin punctul lui Lemoine, tae laturile triunghiului de referință, care nu le corespund, în șase puncte situate pe o conică, al cărei centru este punctul lui Lemoine".

Este a doua conică a lui *Lemoine* a sistemului.

Existența celor două conice ale lui *Lemoine,* se deduce din cele două cercuri ale sale, aparținând sistemului ortocentric prin proecție cilindrică și analog, având în vedere modul de obținere al cercului lui *Taylor*, cum și proectivitatea acestui mod, definim conica lui *Taylor* a sistemului M.

„Paralelele duse prin piciorul fiecărei ceviene a punctului de referință la celelalte două cevine, tae laturile corespunzătoare ale triunghiului de referință, în șase puncte situate pe conica lui Taylor".

„Centrul conicei lui Taylor este centru al conicei înscrise triunghiului complimentar al pedalului punctului M, *în care* TA_2, TB_2, TC_2 — A_2, B_2, C_2 *fiind punctele de contact ale conicei înscrise, iar* T *centrul ei — sunt paralele cu cevienele centrului conicei circumscrise a sistemului".*

. . .

Cele expuse sunt suficiente pentru a preciza ideia de bază din care decurg. In geometria actuală a triunghiului, se găsesc o sumă de puncte remarcabile, toate legate prin lanțuri de proprietăți și deductibile dintr'unul, de ex., din ortocentru, formând un fel de familie, un sistem cuprinzând încă alte elemente: Cercuri, drepte. Celelalte puncte ale planului sunt considerate „puncte oarecare".

Aceia ce demonstrez în acest articol și voi mai demonstra, arată că de fiecare punct al planului se leagă câte un asemenea sistem de puncte cu tot șirul lor de proprietăți și alte elemente. Deci fiecare punct al planului nu e un punct „oarecare", dar un punct care ca și ortocentrul e capabil să genereze puncte și proprietăți, pe căi absolut analoage ortocentrului. Dela sine înțeles, nu vom

găsi cercul lui *Euler*, dar va exista conica lui *Euler*, conicele lui *Lemoine* etc.

In acest fel se vede aşezarea unui al doilea element de referinţă alături de triunghiu: punctul. Nu stabilim proprietăţi numai în domeniul unui anume punct. Şi enunţurile cer aşa dar dubla precizare: „Fie A B C şi M triunghiul şi punctul de referinţă"; iar proprietatea va urma în întreaga-i extensiune.

Incât proprietăţile reliefate au dublul rol: înfăţişarea unei idei generale din care au născut şi vieţuirea prin ele însele.

NOTE MATEMATICE

15. *Asupra problemei 706.*

Luând două cifre oaricari a şi b şi un sistem de numeraţie în baza B, având întotdeauna a şi b mai mici ca B, atunci îmi propun să calculez suma:

$$S_B = (a\,a)_B + (a\,b\,b\,a)_B + \ldots + (a\,b\,b\ldots b\,a)_B.$$

Scriind prin urmare:

$$S_B = (a\,B + a) + (a\,B^2 + b\,B + a) + \ldots$$
$$\ldots + (a\,B^n + b\,B^{n-1} + \ldots + b\,B + a).$$

Voiu deduce că:

$$S_B = a\frac{B(B^n-1)}{B-1} + b\frac{B(B^{n-1}-1)}{B-1} +$$
$$b\frac{B(B^{n-2}-1)}{B-1} + \ldots + b\frac{B(B-1)}{B-1} + n\,a.$$

Sau scriind succesiv că:

$$S_B = \frac{1}{B-1}\Big[a\,B(B^n-1) + b\,B(B^{n-1}-1) +$$
$$b\,B(B^{n-2}-1) + \ldots + b\,B(B-1) + n\,a(B-1)\Big].$$

$$\therefore\ S_B = \Big[a\,B(B^n-1) + b\,B\big[B^{n-1} + B^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + B - (n-1)\big] + n\,a(B-1)\Big]\frac{1}{B-1}$$

$$\therefore\ S_B = \Big[a\,B(B^n-1) + \frac{b\,B^2(B^{n-1}-1)}{B-1} +$$
$$n\,a(B-1) - (n-1)\,b\,B\Big]\frac{1}{B-1}.$$

Şi în sfârşit:

$$S_B = \frac{1}{(B-1)^2}\Big[a\,B(B-1)(B^n-1) + b\,B^2(B^{n-1}-1)$$
$$+ n\,a(B-1)^2 - (n-1)\,b\,B(B-1)\Big].$$

Unde se vede uşor că pentru:

$$a=1,\ b=2 \text{ şi } B=10.$$

Avem:

$$S_{10} = \frac{11}{81}\Big[10^{n+1} - 9\,n - 10\Big].$$

CAP. I. LINTES

16. — *Asupra unor inegalităţi.*

Să cosiderăm câtimele:

$$x_1^{kn},\ x_2^{kn},\ x_3^{kn},\ x_4^{kn},\ \ldots,\ x_{n-1}^{kn},\ x_n^{kn}.$$

Şi să scriem că:

„Media lor aritmetică este mai mare sau cel puţin egală cu media lor geometrică", adică:

$$\frac{x_1^{kn} + x_2^{kn} + \ldots + x_n^{kn}}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1^{kn}\,x_2^{kn}\ldots x_n^{kn}}$$

sau:

$$(1)\qquad x_1^{kx} + x_2^{kn} + \ldots + x_n^{kn} \geqq n\,x_1^k\,x_2^k\ldots x_n^k.$$

Pentru câtimele:

$$x_1^p\,x_2^q,\ x_2^p\,x_3^q,\ \ldots,\ x_n^p\,x_1^q$$

şi pentru:

$$x_1^q\,x_2^p,\ x_2^q\,x_3^p,\ \ldots,\ x_n^q\,x_1^p,$$

unde $p+q=kn$, vom avea de asemenea:

$$(2)\quad x_1^p\,x_2^q + x_2^p\,x_3^q + \ldots + x_n^p\,x_1^q \geqq n\,x_1^k\,x_2^k\ldots x_n^k$$

$$(3)\quad x_1^q\,x_2^p + x_2^q\,x_3^p + \ldots + x_n^q\,x_1^p \geqq n\,x_1^k\,x_2^k\ldots x_n^k.$$

Să considerăm $p<q$. Adunând (2) cu (3), avem:

$$x_1^p\,x_2^p\,(x_1^{q-p} + x_2^{q-p}) + x_2^p\,x_3^p\,(x_2^{q-p} + x_3^{q-p}) + \ldots$$
$$\ldots + x_n^p\,x_1^p\,(x_n^{q-p} + x_1^{q-p}) \geqq 2\,n\,x_1^k\,x_2^k\ldots x_n^k.$$

Dacă aici facem pe rând:

$$p=1,\ q=2,\ n=3,\ k=1;$$
$$p=1,\ q=2,\ n=n,\ k=1;$$

obținem inegalitatea (a_1) și generalizarea ei, stabilite de d-l *Cezar Coșniță*, în articolul „Câteva inegalități". Dacă adunăm (1) cu (2) și (3) și descompunem în factori, avem:

$$(x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)(x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q) \geq$$
$$n^2 x_1^k x_2^k \ldots x_n^k.$$

În această inegalitate făcând pe rând:

$$p = 1, \quad q = 2, \quad n = 3, \quad k = 1;$$
$$p = 1, \quad q = 3, \quad n = 4, \quad k = 1;$$
$$p = 1, \quad q = n - 1, \quad n = n, \quad k = 1,$$

obținem inegalitatea (a_2) și încă alte 2 inegalități stabilite tot în articolul mai sus menționat.

Dacă în inegalitatea (1) facem $k = 1$, avem:

$$(4) \qquad x_1^n + x_2^n + x_3^n + \ldots + x_n^n \geq n\, x_1 x_2 x_3 \ldots x_n.$$

De asemenea dacă în (2) facem pe rând:

$$p = n - 1, \quad q = 1, \quad k = 1;$$
$$p = n - 2, \quad q = 2, \quad k = 1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p = 1, \quad q = n - 1, \quad k = 1,$$

avem:

$$(I) \quad x_1^{n-1} x_2 + x_2^{n-1} x_3 + \ldots + x_n^{n-1} x_1 \geq n\, x_1 x_2 \ldots x_n$$
$$(II) \quad x_1^{n-2} x_2^2 + x_2^{n-2} x_3^2 + \ldots + x_n^{n-2} x_1^2 \geq n\, x_1 x_2 \ldots x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(N) \quad x_1 x_2^{n-1} + x_2 x_3^{n-1} + \ldots + x_n x_1^{n-1} \geq n\, x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Adunând pe (4), înmulțită cu 2, cu (I) înmulțită cu C_n^1, cu (II) înmulțită cu C_n^2, ș. a. m. d., și cu (N) înmulțită cu C_n^{n-1} și grupând, avem:

$$(x_1 + x_2)^n + (x_2 + x_3)^n + \ldots + (x_n + x_1)^n \geq$$
$$(2 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1})\, n\, x_1 x_2 \ldots x_n$$

și ținând seama de formula:

$$2^{n-1} = C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m,$$

avem:

$$(x_1 + x_2)^n + (x_2 + x_3)^n + \ldots + (x_n + x_1)^n \geq$$
$$2^n\, n\, x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Dacă în această inegalitate facem $n = 3$, obținem inegalitatea (a_3) stabilită tot în articolul amintit.

NICOLAE O. ZAHARIA
lic. Constanța

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIȘOARA

Examen de fine de an
Lucrare scrisă de Geometrie Analitică
27 Iunie 1928
(Urmare).

Seria V

Fie $O\,m$ și $O\,n$ două drepte simetrice față de axa $O\,x$. Pe aceste drepte se iau punctele M și N așa fel încât suma $OM + ON$ să fie egală cu un număr dat k. Se cere locul punctului de întâlnire al medianelor triunghiului O M N.

II. Fie P un punct pe elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

și A, B două puncte diametral opuse pe aceiași elipsă. Se cere: 1° locul punctului de întâlnire H al înălțimelor triunghiului A P B când P se mișcă pe elipsă, iar diametrul A B rămâne fix. 2° locul aceluiași punct H când P rămâne fix, iar A B se rotește în jurul lui O.

III. Să se găsească secțiunile ciclice ale cuadricei:

$$x^2 + 3\,yz - y^2 - 1 = 0.$$

Seria VI

I. Fie $O\,x$, $O\,y$ două axe dreptunghiulare și P un punct fix. O secantă dusă prin P tae pe $O\,x$ în A și pe $O\,y$ în B. Perpendiculara în P pe A B taie pe $O\,x$, $O\,y$ respectiv în A′ și B′. Perpendiculara din A′ și B′ pe O P taie pe A B în A″ și B″. Să se arate că:

$$A''B'' = AB.$$

II. Un triunghiu A B C are vârful A fix și unghiul A constant, iar vârfurile B și C mobile pe o dreaptă fixă Δ. Se cere: 1° să se arate că centrul cercului circumscris triunghiului A B C descrie o iperbolă cu un focar în A. 2°. Să se caute locul polului dreptei Δ față de cercul A B C.

Se va lua A ca origină a axelor, perpendiculara și paralela din A la Δ ca axe de coordonate.

III. Să se găsească secțiunile ciclice ale cuadricei:

$$x^2 - 3\,xy - z^2 + 3\,x - 2\,z = 0.$$

Seria VII

I. Fie B un punct fix pe Ox și C alt punct fix pe Oy, iar I un punct mobil în plan. BI și Oy se taie în D, iar CI și Ox se taie în E. Fie F un punct oarecare pe OI. Fie G întâlnirea lui DF cu CI și H întâlnirea lui EF cu BD. Să se arate că GH trece prin intersecția dreptelor BC și DE.

II. Fie M un punct mobil pe cercul:

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

cu centrul în O. Se proectează M în P și Q pe axele Ox, Oy. Se cere: 1° ecuația iperbolei echilatere circumscrise dreptunghiului OPMQ: 2° locul centrelor acestei iperbole când M se mișcă pe cercul dat.

III. Să se găsească secțiunile ciclice ale cuadricei:

$$x^2 + 3yz - y^2 + 2y - 3z - 2 = 0.$$

Seria VIII

I. Pe baza sau pe prelungirea bazei BC a unui triunghiu isoscel ABC se ia segmentul DE egal cu jumătate din BC. Perpendiculara în D pe BC taie pe AB în F. Să se demonstreze că perpendiculara în E pe EF, concură în același punct cu înălțimea din A și cu perpendiculara în B pe AB.

II. Se dă punctul fix $P(\alpha, \beta)$, situat pe dreapta fixă:

$$x + 2y - 1 = 0$$

care taie axa Ox în C și axa Oy în D, și o dreaptă variabilă PAB trecând prin P. Această dreaptă taie axa Ox în A și axa Oy în B. Prin A și B se duc paralele la axele Oy și Ox care se taie în M. Se cere: 1° să se arate că locul geometric al lui M când PAB se rotește în jurul lui P este o iperbolă. 2° când P descrie dreapta CD vârfurile acestei iperbole descriu o conică.

III. Să se găsească secțiunile ciclice ale cuadricei:

$$y^2 + 3xz - z^2 - 3x + 2y + 2z - 1 = 0.$$

Seria IX

I. O dreaptă Δ taie axele Ox și Oy respectiv în A și B. Fie C un punct mobil pe Δ; P și Q proecțiile lui C pe Ox și Oy. Perpendiculara în A pe Ox taie pe QC în E, iar perpendiculara în B pe Oy taie pe PC în D. Să se demonstreze că dreptele DE, AB, PQ se întâlnesc într'un punct M care împarte segmentul PQ în părți proporționale cu OP și OQ.

II. Se cere: 1° să se stabilească ecuația generală a parabolelor care au vârful în O (0, 0) și care trec prin punctul A $(0, a)$: 2° să se găsească locul geometric al întâlnirei tangentei în O cu tangenta în A la aceste parabole. 3° să se găsească locul geometric al întâlnirei normalei în O cu normala în A la aceste parabole.

III. Să se găsească secțiunile ciclice ale cuadricei:

$$y^2 + 3xz - z^2 - 3x + 2z - 2 = 0.$$

(Durata 4 ore pentru fiecare serie).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIII, No. 12, August 1928. Sur l'orthopôle, par *V. Thébault*. Asupra indicatorilor, de ordin superior, de *Căpitan I. Linteș*. Asupra centrelor de curbură la conice de *Sublocot*. *Mihail I. Focșeneanu*, Congres internațional al matematicianilor, de I. I.

2. *Revista de Ciencias*, Ano XXXI, Lima-Peru, No. 4—6, Abrilo-Iunio, 1928. La Revista de Ciencias ante la reforma universitaria, *La Direccion*.

Consejo national de ensenantzo universitaria. Métodos sencilios para las medidas espectrales de la radiación solar par *Ladislao Gorezysnki*, *Dr. en Ciencias*.

Forma general de las ecuaciones de la dinamica, *Dr. Ing. Godofredo Garcia*. Botámica taxonómica, *Dr. Fortunato L. Herrera*. La mecanica de *Wronsky*, *Dr. Ing.* **Godofredo Garcia.**

PROBLEME REZOLVATE

691. — *Fiind dată ecuația:*

$$\alpha x^6 + \beta x^4 + \gamma x^2 + 1 = 0,$$

care admite rădăcinele:

$$\pm\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}, \quad \pm\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}, \quad \pm\sqrt{\operatorname{tg}\frac{C}{2}},$$

să se formeze ecuația ale cărei rădăcini să fie laturile triunghiului.

GH. SPRINCEANA

Privind ecuația dată, ușor deducem că ecuația:

(1) $$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 1 = 0,$$

are ca rădăcini, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

Inlocuind în (1) x prin $\frac{1}{x}$ și aducând la formă întreagă, căpătăm ecuația:

(2) $$x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0,$$

cu rădăcinele: $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$.

Ținând seama de relațiile cunoscute:

$$\cot\frac{A}{2} = \frac{p-a}{r}, \quad \cot\frac{B}{2} = \frac{p-b}{r},$$

$$\cot\frac{C}{2} = \frac{p-c}{r}, \quad a + b + c = 2p,$$

și scriind relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației (2), avem:

$$(3)\quad \sum \cot\frac{A}{2} = \sum \frac{p-a}{r} = -\gamma$$

$$(4)\quad \sum \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} = \sum \frac{(p-a)(p-b)}{r^2} = \beta$$

$$(5)\quad \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3} = -\alpha.$$

Observăm încă, că:

$$\gamma = \alpha,$$

căci e cunoscută relația:

$$\sum \cot\frac{A}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

Relația (3) se poate scri:

$$3p - 2p = -\alpha r,$$

deci:

$$(3')\qquad \sum a = -2\alpha r.$$

Relația (4) se poate scri:

$$\sum \left[p^2 - p(a+b) + ab\right] = \beta r^2,$$

sau:

$$3p^2 - 2p\sum a + \sum ab = \beta r^2.$$

De aci deducem:

$$\sum ab = \beta r^2 - 3p^2 + 4p^2 = \beta r^2 + p^2.$$

Cum din (3'):

$$p = -\alpha r,$$

găsim:

$$(4')\qquad \sum ab = r^2(\alpha^2 + \beta).$$

Din relația (5), deducem:

$$p^3 - p^2\sum a + p\sum ab - abc = -\alpha r^3.$$

De aci deducem, ținând seamă de relațiile de mai sus:

$$abc = \alpha r^3 + p^3 - 2p^3 + pr^2(\alpha^2+\beta) = \alpha r^3 + \alpha^3 r^3 - \alpha r^3(\alpha^2+\beta),$$

deci:

$$(5')\qquad abc = \alpha r^3(1-\beta).$$

Folosind relațiile (3'), (4'), (5'), care scriu suma laturilor a, b, c, suma produselor lor luate câte două, și produsul lor, ușor putem forma ecuația care are ca rădăcini pe a, b, c, ea este:

$$x^3 + 2\alpha r x^2 + r^2(\alpha^2+\beta)x - \alpha r^3(1-\beta) = 0.$$

Aceasta este ecuația cerută:

Observare. E ușor de văzut că ecuația:

$$x^3 + 2\alpha x^2 + (\alpha^2+\beta)x - \alpha(1-\beta) = 0,$$

are ca rădăcini:

$$\frac{a}{r},\quad \frac{b}{r},\quad \frac{c}{r}.$$

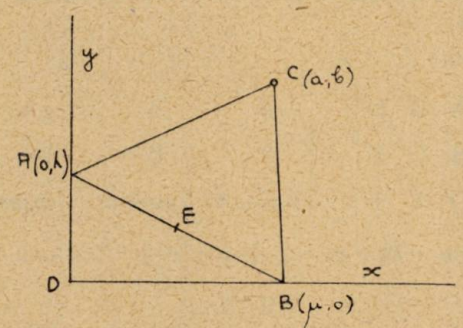
Soluție dată de d-nii: *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați) și *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic, Milit., Craiova).

Observare. S'au mai primit trei soluții bune, (dela liceul Militar, *Iași*) dar fiind copiate una după alta nu se iau în seamă. Așa vom proceda și în viitor.

S'au primit încă unele soluții complect greșite.

700. — *Un patrulater* A D B C *are unghiul* D *drept, laturile* A D *și* D B *fixe de poziție, vârful* C *fix și unghiul* C *constant. Să se afle locul geometric al mijlocului diagonalei* A B.

ION Z. PANTU



Luăm ca axe de coordonate D B și D A. Fie, C(a, b) fix și A$(0, \lambda)$, B$(\mu, 0)$ două puncte variabile pe axele de coordonate. Fie:

$$\operatorname{tg} C = m \text{ (constant)},$$

Coeficienții unghiulari ai dreptelor AC și BC fiind:

$$\frac{b-\lambda}{a}, \quad \frac{b}{a-\mu},$$

putem scri:

$$m=\frac{\dfrac{b-\lambda}{a}-\dfrac{b}{a-\mu}}{1+\dfrac{b(b-\lambda)}{a(a-\mu)}}=\frac{(b-\lambda)(a-\mu)-ab}{a(a-\mu)+b(b-\lambda)},$$

sau:

(1) $\quad m(a^2+b^2-a\mu-b\lambda)=\lambda\mu-\lambda a-\mu b.$

Fie E mijlocul lui AB. Coordonatele lui E sunt:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\mu}{2} \\ y=\dfrac{\lambda}{2}. \end{cases}$$

De aci, deducem:

$$\mu=2x. \quad \lambda=2y,$$

care introduse în (1) ne dau:

$$m(a^2+b^2-2ax-2by)-4xy+2ay+2bx=0$$

sau:

(2) $\quad 4xy-2(b-am)x-2(a-bm)y-m(a^2+b^2)=0.$

Aceasta este ecuația locului geometric al mijlocului diagonalei AB, ea este o conică.

Pentru a ne pronunța, care este felul conicei să calculăm, pe Δ și δ care caracterizează natura conicei.

Avem:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & am-b \\ 2 & 0 & bm-a \\ am-b & bm-a & -m(a^2+b^2) \end{vmatrix}$$

$$=4(am-b)(bm-a)+4m(a^2+b^2)=4ab(1+m^2)$$

$$\delta=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4.$$

Cum:

$$\Delta\neq 0 \quad \text{și} \quad \delta<0,$$

conica (2) este o iperbolă.

Soluții date de d-nii: *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab București), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Iași), *Gheorghiev N.*, *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Mărculescu I. Origen* (Dolj), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sirchis I.* (lic. Tighina) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași).

701*. — *Fie funcțiunea:*

$$y=\frac{ax^2+bx+1}{x^2+cx+d}.$$

Să se determine a, b, c, d astfel ca funcțiunea să aibă minimul $y=-1$ *pentru* $x=-2$ *și maximul* $y=2$ *pentru* $x=1$. *Să se reprezinte în acest caz funcțiunea.*

I. DIMITRIU-ARAD

Prima soluție. Eliminând numitorul și ordonând după puterile lui x, avem:

(1) $\quad x^2(y-a)+x(cy-b)+dy-1=0.$

Valorile care fac maxim sau minim pe y sunt acelea care anulează realizantul ecuației (1), în care caz x, devine:

$$x=\frac{cy-b}{2(a-y)}.$$

Această relație conform enunțului trebuie să fie satisfăcută de valorile:

(2) $\quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2, \end{cases}$

trebue deci ca coeficienții a, b, c, d să satisfacă relațiile:

(3) $\quad \dfrac{-c-b}{2(a+1)}=-2, \quad \dfrac{2c-b}{2(a-2)}=1.$

Valorile (2) trebuie să satisfacă și relația dată, deci avem:

(4) $\quad \dfrac{4a-2b+1}{4-2c+d}=-1, \quad \dfrac{a+b+1}{1+c+d}=2.$

Relațiile (3) și (4) formează un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute, care pus sub forma întreagă, devine:

$$(5)\quad \begin{cases} 4a - b - c = -4 \\ 2a + b - 2c = 4 \\ 4a - 2b - 2c + d = -5 \\ a + b - 2c - 2d = 1. \end{cases}$$

Să rezolvăm acest sistem liniar. Adunând primele două relații, deducem:

$$c = 2a,$$

care introdusă în ecuația 2-a ne dă:

$$b = 2a + 4.$$

Aceste valori introduse în ecuația 3, ne dă:

$$d = 4a + 3.$$

Inlocuind aceste valori c, b, d în ultima ecuație, găsim: $a = -\frac{1}{3}$,

apoi găsim ușor:

$$b = \frac{10}{3}, \quad c = -\frac{2}{3}, \quad d = \frac{5}{3}.$$

Atunci funcțiunea dată, devine:

$$y = \frac{-x^2 + 10x + 3}{3x^2 - 2x + 5}.$$

Derivata fiind:

$$y' = \frac{(-2x+10)(3x^2-2x+5)-(6x-2)(-x^2+10x+3)}{(3x^2-2x+5)^2}$$

$$= \frac{-28(x^2+x-2)}{(3x^2-2x+5)^2},$$

se anulează pentru:

$$x' = 1, \quad x'' = -2.$$

Funcțiunea se anulează pentru:

$$x = 5 \pm \sqrt{28}.$$

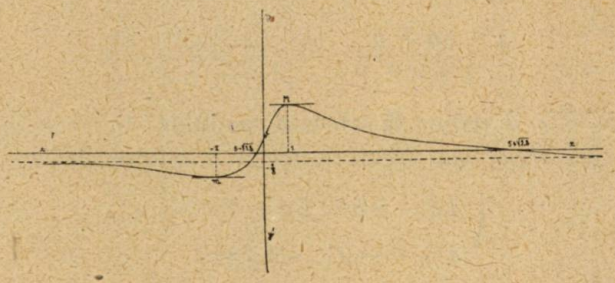
Funcțiunea nu este discontinuă, numitorul ei având rădăcini imaginare.

Pentru $x = \pm\infty$, avem $y = -\frac{1}{3}$, care este asimptotă.

Avem următorul tablou de variație:

x	$-\infty$	-2	$5-2\sqrt{7}$	0	1	$5+2\sqrt{7}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	$-\frac{1}{3}$	-1	0	$\frac{3}{5}$	2	0	$-\frac{1}{3}$

iar reprezentarea are forma alăturată.



Soluții date de d-nii; *Almăjan Petru* (Caransebeș), *Antoniu Eugen* (Caransebeș), *Căzămir A. Iosif* (lic. Arad), *Ciancilian Agop* (lic, Brașov), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați), *Hamerak Carol* (Caransebeș), *Hantila Florea* (Caransebeș), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeș), *Jumanca Zeno* (Caransebeș), *Micula O.* (Timișoara), *Mihuț Metodie* (lic. Caransebeș), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Pârvu Victor* (Caransebeș), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roth Ladislau* (Caransebeș, *Saur Ioan* (lic. Arad), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov) și *Topliceanu C-tin* (Caransebeș).

Soluția 2-a. Pentru $x = -2$, avem $y = -1$, deci:

$$(1)\quad -1 = \frac{4a - 2b + 1}{4 - 2c + d}.$$

Pentru $x = 1$, avem $y = 2$, deci:

$$(2)\quad 2 = \frac{a + b + 1}{1 + c + d}.$$

Să calculăm acum derivata funcțiunei date, ea este:

$$y' = \frac{(2ax+b)(x^2+cx+d)-(2x+c)(ax^2+bx+1)}{(x^2+cx+d)^2}$$

$$= \frac{2ax+b}{x^2+cx+d} - \frac{2x+c}{x^2+cx+d} \cdot \frac{ax^2+bx+1}{x^2+cx+d}.$$

Această derivată trebue să se anuleze însă pentru $x = -2$ și $x = 1$, obținem deci relațiile:

$$\frac{-4a+b}{4-2c+d} - \frac{-4+c}{4-2c+d} \cdot \frac{4a-2b+1}{4-2c+d} = 0$$

$$\frac{2a+b}{1+c+d} - \frac{2+c}{1+c+d} \cdot \frac{a+b+1}{1+c+d} = 0.$$

Aceste relații se pot simplifica în virtutea relațiilor (1) și (2) și obținem:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{-4a+b}{4-2c+d}+\dfrac{-4+c}{4-2c+d}=0 \\ \dfrac{2a+b}{1+c+d}-2\dfrac{2+c}{1+c+d}=0, \end{cases}$$

a, b, c, d trebue să satisfacă condițiile (1), (2) și (3), care scrise sub formă întreagă și reduse, devin:

$$(4)\quad \begin{cases} 4a-2b-2c+d=-5 \\ a+b-2c-2d=1 \\ 4a-b-c=-4 \\ 2a+b-2c=4. \end{cases}$$

Acesta este sistemul de ecuații care ne dă pe a, b, c, d și cum observăm că el coincide cu sistemul (5) din soluția precedentă, dezvoltarea mai departe a problemei este analoagă cu cea din soluția precedentă.

Soluții date de d-nii: *Ganea D. Vasile* (lic. Lazăr, București), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Sirchis I.* (lic. Tighina) și *Sprinceană Gh. Gheorghe* (lic. Galați).

721. — *Să se arate că pentru n par, expresiunea:*

$$E=(5^m-4m-1)\left[5^{4m+3}+2\left(2^{6n+3}+1\right)\right],$$

se divide cu 208, m fiind întreg pozitiv.

POPESCU D. STELIAN

$208=16\times 13$.

Dacă considerăm desvoltarea:

$$(1+a)^m-am-1=1+ma+\frac{m(m-1)}{12}a^2+\ldots$$

$$\ldots+a^m-am-1=\text{mult. } a^2,$$

și facem, $a=4$, avem:

$$(1)\qquad 5^m-4m-1=\text{mult. } 16.$$

Apoi:

$$5^{4m+3}+2(2^{6n+3}+1)=125\times 625^m+16\times 64^n+2=$$

$$(\text{mult } 13+8)(\text{mult } 13+1)^m+(13+3)[\text{mult } 13+(-1)^n]+2=\text{mult } 13+8+\text{mult } 13+3\times(-1)^n+2$$

și cum n e par, avem:

$$(2)\quad 5^{4m+3}+2(2^{6n+3}+1)=\text{mult } 13+13=\text{mult } 13.$$

Multiplicând relațiile (1) și (2), găsim:

$$(5^m-4m-1)\left[5^{4m+3}+2\left(2^{6n+3}+1\right)\right]=$$

$$\text{mult } 16\times 13=\text{mult } 208.$$

Expresia dată, este deci divizibilă cu 208.

Soluții date de d-nii: *Almăjan Petru* (lic. Caransebeș), *Arganini Victor* (lic. Pitești), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iași), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu At. Ion* (lic. Galați), *Dobromirescu P.* (Caracal), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați), *Ghișoiu I. Petru* (lic. Spiru Haret, București), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu P. Haralambie* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Licev Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Micula O.* (Timișoara), *Nichiforescu Gh. Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Panțu Z. Ion* (București), *Roman I. Ioan* (București), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăroiu D-tru* (liç. Brașov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Ștefan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași) și *Vâlceanu N. Justin.*

722. — *Să se dovedească că ecuațiile:*

$$6x^2+2\sqrt{2}(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$$

$$2x^2+2\sqrt{2}(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$$

$$x^2+\sqrt{3}(a+b+c)x+2(ab+bc+ca)=0$$

au rădăcinele reale oricare ar fi a, b, c reali.

COSNITA CEZAR

Pentru ca aceste ecuații de gradul al 2-lea să aibă rădăcinele reale, trebue să arătăm că realizanții lor sunt pozitivi, sau nuli.

Realizantul primei ecuații este:

$$R_1=2(a+b+c)^2-6(ab+bc+ca),$$

care se mai poate scri:

$$R_1=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0,$$

R_1 fiind o sumă de patrate de numere reale este pozitiv, sau nul (dacă, $a=b=c$). Prima ecuație are deci rădăcini reale.

Realizantul ecuației a 2-a este:

$$R_2=2(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca),$$

care se mai poate scri:

$$R_2=2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)=$$

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\geq 0.$$

Ecuația a 2-a are și ea rădăcinele reale.

Realizantul ecuației a 3-a este:

$$R_3 = 3(a+b+c)^2 - 8(ab+bc+ca),$$

care se mai poate scrie:

$$R_3 = 3(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ca) =$$

$$(a+b-c)^2 + (a+c-b)^2 + (b+c-a)^2 \geq 0.$$

R_3 fiind și el o sumă de patrate de numere reale este pozitiv sau nul (dacă, $a=b=c$).

Ecuația a 3-a are și ea rădăcinele sale reale.

Soluții date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjan Petru* (lic. Caransebeș), *Arganini Victor* (lic. Pitești), *Băncilă Gheorghe, Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Bucurescu Ion* (Șc. Milit. de Geniu), *Cincilian Agop* (lic. Brașov), *Cocârlan Pavel, Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați) *Dumitrescu Nicolae* (lic. Timișoara), *Gavrilescu Vasile* (lic. Brașov), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova). *Gheorghiu Th. Gheorghe* (lic. Galați), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Hohoi Vasile* (lic. Brașov), *Ionescu P. Haralambie* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Jurca Corneliu* (Șc. Polit., Timișoara), *Licev Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Magda Ovidiu* (lic. Cluj), *Micula O.* (Timișoara), *Mocănescu C. Ion* (lic. Târgoviște), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila), *Nichiforescu Gh. Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Panaitescu Ion* (lic. Milit., Craiova), *Panțu Z. Ion* (București), *Pârvu Aurel* (student în matematici), *Popescu O. Adrian* (lic. Milit., Craiova), *Popescu P. Eugen, Rapaport Leon* (lic. Kogălniceanu, Iași), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Rășcanu C-tin* (lic. Kogălniceanu, Iași), *Roman I. Ioan* (București), *Savin C. Ioan* (lic Milit, Iași), *Secăroiu D-tra* (lic, Brașov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg-Jiu), *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

Au mai trimes soluții d-l: *Hamparțum Grigore* (lic. Constanța.

Observare. S'au primit și unele soluțiuni nesuficient demonstrate.

Generalizare, dată de d-l *Zaharia O. Niculae* (lic. Constanța).

Să se arate că ecuația:

$$mx^2 + n(a_1+a_2+\ldots+a_p)x + k(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{p-1}a_p) = 0,$$

are toate rădăcinele reale, unde $a_1, a_2, \ldots a_p$, m, k *sunt reali, dacă avem satisfăcute una din relațiile:*

(2) $4mk = 3n^2$, (3) $4mk = n^2$, (4) $4mk = 2n^2+2$

și în acest caz, $n^2 = p$.

In adevăr, realizantul, ecuației (1) este:

$$(5)\quad R = n^2\Sigma a_1^2 + 2n^2\Sigma a_1a_2 - 4kmn\Sigma a_1a_2 =$$

$$n^2\Sigma a_1^2 + (2n^2 - 4mk)\Sigma a_1a_2.$$

In virtutea condiției (2), avem:

$$R = n^2\Sigma a_1^2 - n^2\Sigma a_1a_2 = \frac{n^2}{2}[(a_1-a_2)^2 +$$

$$(a_1-a_3)^2 + \ldots + (a_1-a_p)^2 + \ldots + (a_{p-1}+a_p)^2 \geq 0.$$

Realizantul fiind pozitiv sau nul (dacă, $a_1 = a_2 = \ldots = a_p$), ecuația (1) are rădăcini reale.

In virtutea condiției (3), realizantul (5), devine;

$$R = n^2\Sigma a_1^2 + n^2\Sigma a_1a_2 = \frac{n^2}{2}[(a_1+a_2)^2 +$$

$$(a_1+a_3)^2 + \ldots + (a_{p-1}+a_p)^2] \geq 0.$$

deci ecuația (1) are rădăcinele reale.

In virtutea condițiilor (4), realizantul ecuației (1), devine:

$$R = n^2\Sigma a_1^2 - 2\Sigma a_1a_2 = p\Sigma a_1^2 - 2\Sigma a_1a_2 =$$

$$(\Sigma a_1 - 2a_1)^2 + (\Sigma a_1 - 2a_2)^2 + \ldots + (\Sigma a_1 - 2a_p) \geq 0,$$

ecuația (1) are și în acest caz, rădăcini reale:

Dacă în (1) luăm:

$$m = 6,\quad n = 2\sqrt{2},\quad k = 1,\quad p = 3,$$

atunci condiția (2) e satisfăcută și obținem prima ecuație din enunț dela început.

Dacă în (1), luăm:

$$m = 2,\quad n = 2\sqrt{2},\quad k = 1 \text{ și } p = 3,$$

condiția (3) este satisfăcută, și avem a 2-a ecuație din enunțul propus.

In fine, dacă în (1), luăm:

$$m = 1,\quad n = \sqrt{3}\quad k = 2 \text{ și } p = 3,$$

condiția (4) este satisfăcută și avem a 3-a ecuație din enunțul inițial.

PROBLEME PROPUSE

752, — Să se găsească un patrat perfect de opt cifre, știind că numărul format de primele patru cifre este cu 100 de unități mai mare, ca numărul format de ultimele patru cifre.

N. G. Botea

753. — Se dă un trapez $ABCD$, cu laturile paralele AB și CD. Se împart laturile neparalele în trei părți egale:

$$AE=EF=FD=\frac{AD}{3},\quad BH=HI=IC=\frac{BC}{3}.$$

Fie K și L punctele de întâlnire ale dreptelor AH, DI și BE, CF. Să se arate că dreapta KL este paralelă cu AB și să se calculeze lungimea ei. Să se arate încă, că mijlocul lui KL este centrul de greutate a trapezului.

PAUL EUGEN

754. — Să considerăm un triunghiu oarecare ABC înscris în cercul O și fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimelor lui, iar A', B', C' punctele unde AO, BO, CO tae pe BC, CA, AB. Se consideră următoarele puncte de intersecție:

$$M\equiv(BB', CC_1);\ N\equiv(CC', AA_1);\ P\equiv(AA', BB_1);$$

$$M'\equiv(BB_1, CC');\ N'\equiv(CC_1, AA');\ P'\equiv(AA_1, BB').$$

Să se demonstreze că:

1°. Dreptele: AM, BN, CP sunt concurente.

2°. Dreptele: AM', BN', CP' sunt concurente.

3°. Triunghiurile $OM'P$, $ON'M$, $OP'N$ sunt isoscele.

Să se arate că primele două puncte ale problemei subzistă și în cazul când în loc de înălțimele lui ABC și dreptele AO, BO, CO, se consideră două grupuri de ceviene oarecare.

CEZAR COSNITA

755. — Dându-se ecuațiile:

$$ax^2+bx+c=0,\quad a_1x^2+b_1x+c_1=0,$$

și expresia:

$$E=(bb_1+4aa_1)(bb_1+4cc_1)-4(ab_1+bc_1)(a_1b+b_1c),$$

se cere să se arate că:

1°. Dacă ecuațiile au rădăcini raționale, E este un patrat perfect.

2°. Dacă una din ecuații are rădăcini egale, E este nul.

ROMAN I. IOAN

750*. — Se consideră polinoamele:

$$\varphi_1(x)=x^8+28x^6-70x^4+28x^2$$

$$\varphi_2(x)=x^6-7x^4+7x^2-1.$$

Să se rezolve ecuația:

$$\varphi_1(x)-8ix\varphi_2(x)-1=0,\qquad (i=\sqrt{-1}).$$

GH. V. NICOLAU

756. — Se cere, pentru n tinzând la infinit, limita expresiei:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k^3+12k^2+47k+60}.$$

GH. I BALABAN

757. — Dacă notăm:

$$A_k=\frac{a\cos\frac{k\pi}{3}+b\sin\frac{k\pi}{3}}{a_1\cos\frac{k\pi}{3}+b_1\sin\frac{k\pi}{3}},$$

se cere să se stabilească identitățile:

$$\sum_{k=0}^{2}A_k=3\frac{ab_1^2-aa_1^2+2a_1bb_1}{a_1(3b_1^2-a_1^2)}$$

$$A_0A_1+A_0A_2+A_1A_2=3\frac{a_1b^2-a_1a^2+2abb_1}{a_1(3b_1^2-a_1^2)}$$

$$A_0A_1A_2=\frac{a(3b^2-a^2)}{a_1(3b_1^2-a_1^2)}.$$

V. ALACI

758. — In orice triunghiu, avem:

$$\cot A+\cot B+\cot C-\frac{p}{4r}\geq\frac{r_a+r_b+r_c}{4p},$$

notațiile fiind cele obicinuite.

NICOLAE O. ZAHARIA

*) Problema 750 din numărul trecut fiind cunoscută, se înlocuește cu prezenta, sub același număr.

INFORMAȚIUNI

Fie-care problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Nu se pot lua în seamă pentru problemele de *Concurs,* de cât acelea sosite la timp și anunțate în revistă.

Problemele propuse de corespondenții înscriși la *Concurs,* se socotesc cu numărul de puncte corespunzător, ca oricărui rezolvător înscris pentru *Concurs.*

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri nu mere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

Sucursala Timişoara

ANUL VIII. 15 OCTOMBRIE 1928 NO. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. VÂLCOVICI. DERIVATA UNUI VECTOR IN MARIME ABSOLUTA.

2. NOTE MATEMATICE, 17, 18, 19.

4. BIBLIOGRAFIE.

5. PROBLEME REZOLVATE: 708, 716, 718 719, 723. 726, 727, 730.

6. PROBLEME PROPUSE.

7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.

ANUL VIII — NO. 8. TIMISOARA, 15 OCTOMBRIE 1928

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

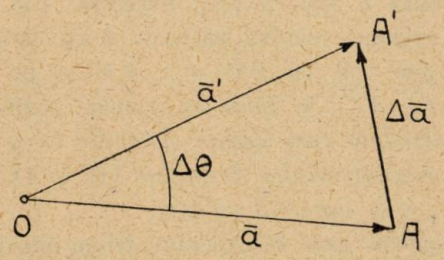
DERIVATA UNUI VECTOR CONSTANT IN MARIME ABSOLUTA

de V. VALCOVICI

Cu toate avantagiile pe care o prezintă forma vectorială a Mecanicei, se văd totuși prea adesea, chiar în tratate care au adoptat crezul vectorial, urmele formalismului cartezian în rezolvarea unor chestiuni care s'ar prezinta mult mai simplu cu notația vectorială.

Imi propun să arăt o ilustrație a acestei afirmațiuni, calculând derivata în raport cu timpul a unui vector, care nu-și schimbă valoarea sa absolută și aplicând apoi formula găsită la mișcarea circulară.

Am ales mișcarea circulară fiindcă aceasta se găsește prin manualele de Mecanică mai întotdeauna — *când se găsește* — tratată în coordonate carteziene, de unde lipsa unei intuiții imediate a poziției vitezei și a valorii accelerației. Și doar această mișcare trecută cu vederea în multe cursuri de Mecanică este, alături de mișcarea rectilinie, pivotul unei bune părți din Mecanica aplicată.



Să presupunem așa dar că vectorul $\bar{a}$ rămâne constant în valoare absolută și că unghiul dintre $\bar{a}$ și $\bar{a}'$ este $\Delta\theta$. Dacă A și A′ sunt respectiv capetele vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{a}'$, atunci avem:

$$\Delta\bar{a} = \overline{AA'}.$$

Unghiul $\Delta\theta$ fiind foarte mic, putem considera coarda AA′ confundându-se cu arcul AA′ din cercul având centrul în O, în cât valoarea absolută a vectorului $\Delta\bar{a}$ va fi:

$$a\,\Delta\theta.$$

Impărțind prin intervalul de timp Δt și trecând la limită obținem:

$$a\dot{\theta},$$

pentru valoarea absolută a vectorului $\bar{a}$. Ținând seama apoi că la limită coarda $\overline{AA'}$ se confundă cu tangenta în A la cercul A, deducem că vectorul $\bar{a}$ este perpendicular pe $\bar{a}$ și dirijat în sensul în care $\bar{a}$ are tendința să se rotească în jurul lui O,

Rezumând putem spune:

Derivata în raport cu timpul a unui vector $\bar{a}$ constant în mărime absolută, este egal cu $a\dot{\theta}$ și dirijată perpendicular pe $\bar{a}$ în sensul în care acest vector tinde să se rotească, θ fiind unghiul de rotație a direcției lui $\bar{a}$.

Dacă însemnăm cu $\bar{\varrho}$ versorul lui $\bar{a}$ (adică vectorul unitate care ne dă direcția și sensul vectorului $\bar{a}$) și cu $\bar{\varepsilon}$ versorul care ne dă direcția perpendiculară pe $\bar{a}$, în sensul rotației acestuia atunci putem scrie:

$$\bar{a} = a\,\bar{\varrho} = a\,\dot{\theta}\,\bar{\varepsilon},$$

de unde deducem imediat:

$$\dot{\bar{\varrho}} = \dot{\theta}\,\bar{\varepsilon}, \tag{1}$$

formulă care poate fi privită ca un caz particular al enunțului precedent.

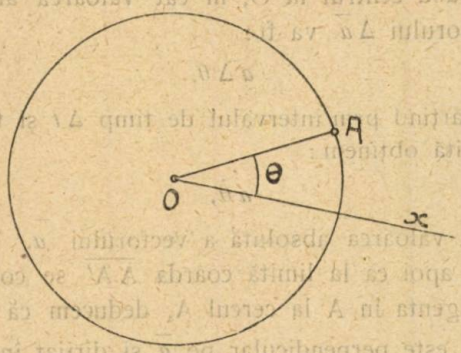
O aplicație a acestor considerațiuni vectoriale, am făcut-o cu altă ocazie[1], calculând ecuațiile de mișcare în coordonate polare și în coordonate naturale.

1. *Asupra unor formule de Mecanică.* Revista Matematică din Timișoara, vol. V, pag. 83.

Să facem acum o altă aplicație considerând *mișcarea circulară* a unui punct. Fie O cercul pe care se mișcă un punct, ocupând poziția A la momentul t și fie θ unghiul la centru pe care-l face vectorul $\overline{OA}$ de poziție corespunzător lui A, cu o direcție fixă Ox. Dacă vom însemna ca de obiceiu cu $\bar{r}$ vectorul de poziție $\overline{OA}$ și cu $\bar{\varrho}$ versorul său, vom putea scrie:

$$\bar{r} = r\bar{\varrho},$$

unde r înseamnă valoarea absolută a vectorului $\bar{r}$.



De aici putem deduce viteza $\bar{v}$ a mobilului în momentul t, derivând expresia precedentă în raport cu timpul:

$$\bar{v} = r\dot{\bar{\varrho}}.$$

Inlocuind pe $\dot{\bar{\varrho}}$ prin valoarea sa (1) obținem:

$$\bar{v} = r\dot{\theta}\bar{\varepsilon}, \tag{2}$$

adică viteza este dirijată pe tangentă și egală cu $r\omega$. Am însemnat cu ω viteza unghiulară $\dot{\theta}$.

Pentru a afla accelerația vom porni dela valoarea precedentă a vitezei derivând-o în raport cu timpul:

$$\bar{a} = r\ddot{\theta}\bar{\varepsilon} + r\dot{\theta}\dot{\bar{\varepsilon}}.$$

Insă derivata vectorului $\bar{\varepsilon}$ constant în mărime absolută se poate găsi imediat cu ajutorul celor ce preced:

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = -\dot{\theta}\bar{\varrho},$$

în cât valoarea accelerației devine:

$$\bar{a} = -r\dot{\theta}^2\bar{\varrho} + r\ddot{\theta}\bar{\varepsilon},$$

sau, în funcțiune de ω:

$$\bar{a} = -r\omega^2\bar{\varrho} + r\dot{\omega}\bar{\varepsilon}.$$

Această formulă ne spune că accelerația în mișcarea circulară are două componente: una egală cu $r\omega^2$ în valoarea absolută și dirijată pe raza vectoară spre centru, *componenta centripetă*, iar alta egală cu $r\dot{\omega}$ și dirijată pe tangentă în sensul mișcării punctului, *componenta tangențială*. Evident că dacă ω este negativ, atunci valoarea absosultă a componentei celei d'a doua va trebui purtată pe tangentă în sens opus mișcării mobilului, după convenția cunoscută dela construcția vectorilor.

In cazul particular al mișcării circulare uniforme, componenta tangențială a accelerației este nulă după cum se vede imediat, încât accelerația este toată dirijată pe raza vectoară spre centru.

Accelerația centripetă nu se anulează decât odată cu viteza unghiulară.

NOTE MATEMATICE

17. *Generalizarea problemei No. 3615, din G. M., (vol. XXXIII, pag. 198).* Imi propun să generalizez în această notă matematică, următoarea problemă a d-lui *Emil Ștefănescu:*

„Se consideră un triunghiu oarecare ABC *și* I *centrul cercului său înscris. Se prelungește* CB *cu* $\overline{BB'} = \overline{BA}$ *și* $\overline{BC}$ *cu* $\overline{CC'} = \overline{CA}$. *Dreptele* IB' *și* IC' *taie respectiv pe* AB *și* AC *în punctele* D *și* E. *Să se arate că* DE *este paralelă cu* BC".

In locul punctului de întâlnire al bisectoarelor (centrul cercului înscris) voi considera punctul de concurență a trei ceviene oarecare. Fie F intersecția cevienei relativă vârfului A cu latura BC. Prelungim CB cu $\overline{BB'} = k \cdot \overline{FB}$ și pe BC cu $\overline{CC'} = k \cdot \overline{FC}$, k fiind un număr pozitiv oarecare. *Dreapta care unește punctele* D *și* E, *obținute prin intersecția dreptelor* $\overline{IB'}$ *și* IC' *cu* AB *și* AC, *este paralelă cu* BC.

In adevăr dacă considerăm triunghiurile AFB și AFC și respectiv transversalele B'I și C'I și aplicăm teorema lui *Menelaus*, obținem:

$$\frac{B'B}{B'F} \cdot \frac{IF}{IA} \cdot \frac{DA}{DB} = 1 \tag{1}$$

$$\frac{C'C}{C'F} \cdot \frac{IF}{IA} \cdot \frac{EA}{EC} = 1. \tag{2}$$

Dacă egalăm expresiile (1) și (2) și observăm că:

$$\frac{B'B}{B'F} = \frac{C'C}{C'F},$$

căci:

$$\frac{k \cdot \overline{FB}}{(k+1) \cdot \overline{FB}} = \frac{k \cdot \overline{FC}}{(k+1) \cdot \overline{FC}},$$

avem:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC},$$

ceiace probează că $\overline{DE}$ este paralelă cu $\overline{BC}$.

AUREL PARVU
student, București.

18 *O generalizare.* In cele ce urmează vreau să generalizez problema No. 11, pag. 22, din „Lecțiuni de Algebră superioară, p. clasa VIII", „Teoria ecuațiilor", a d-lui prof. *N. Abramescu*, anume:

Se cere condiția ca ecuația:

$$(1)\quad f(x) = A_0 x^m + C_m^1 A_1 x^{m-1} + C_m^2 A_2 x^{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + C_m^1 A_{m-1} x + A_m = 0,$$

să poată fi pusă sub forma;

$$(2)\quad a(x+p)^m + a'(x+p')^m = 0,$$

a, p, a', p' fiind numere cari se vor determina ulterior.

Dezvoltând și aranjând ecuația din (2), obținem:

$$x^m (a + a') + C_m^1 (a p + a' p') x^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + C_m^k (a p^k + a' p'^k) x^{m-k} + \ldots$$
$$\ldots + C_m^1 (a p^{m-1} + a' p'^{m-1}) + (a p^m + a' p'^m) = 0.$$

Prin identificare cu (1) obțin un sistem de $m+1$ ecuații de forma:

$$a p^i + a' p'^i = A_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots m).$$

Vom elimina pe a și a' întâi între primele 3 ecuații, pe urmă între a 2-a, a 3-a și a 4°, ș. a. m. d. până la sfârșit. Rezultatul eliminării e un sistem de $m-1$ ecuații de forma:

$$p p' A_s - [p + p'] A_{s+1} + A_{s+2} = 0$$
$$(s = 0, 1, 2, \ldots, (m-2)).$$

Considerând cantitățile $p p'$ și $p + p'$ ca necunoscute și ecuațiile:

$$\begin{cases} p p' A_\alpha - [p + p'] A_{\alpha+1} + A_{\alpha+2} = 0 \\ p p' A_\beta - [p + p'] A_{\beta+1} + A_{\beta+2} = 0 \\ p p' A_\gamma - [p + p'] A_{\gamma+1} + A_{\gamma+2} = 0. \end{cases}$$

Condiția ca sistemul să fie compatibil e ca determinantul:

$$\begin{vmatrix} A_\alpha & A_{\alpha+1} & A_{\alpha+2} \\ A_\beta & A_{\beta+1} & A_{\beta+2} \\ A_\gamma & A_{\gamma+1} & A_{\gamma+2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cum însă α, β și γ iau valori diferite între zero și m, rezultă.

Condiția ca ecuația (1) să poată fi pusă sub forma ecuației (2) e, ca toți determinanții de gradul III formați cu linii luate din tabloul:

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m-3} & A_{m-2} & A_{m-1} \\ A_{m-2} & A_{m-1} & A_m \end{vmatrix}$$

să fie nuli.

ROMAN I. IOAN
absolvent, București

19. *Generalizarea problemei 570.* Imi propun să arăt că problema No. 570, din „Revista Matematică", se poate scrie mai general:

$$\prod \left[\frac{a^2 - b^2}{r + r_c}\right]^n = \frac{p^n}{r^n} (a-b)^n (b-c)^n (c-a)^n.$$

Intr'adevăr ținând seama de relațiunile:

$$r = \frac{s}{p}, \quad r_c = \frac{s}{p-c} \quad a + b = 2p - c,$$

putem scrie:

$$\frac{(a^2-b^2)^n}{(r+r_c)^n} = \frac{(a^2-b^2)^n}{s^n \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-c}\right)^n} = \frac{p^n (p-c)^n (a-b)^n}{s^n}$$

De aci rezultă că:

$$\prod\left(\frac{a^2-b^2}{r+r_c}\right)^n =$$

$$\frac{p^{3n}(p-a)^n(p-b)^n(p-c)^n(a-b)^n(b-c)^n(c-a)^n}{s^{3n}}.$$

Dar:

$$s^{2n} = p^n(p-a)^n(p-b)^n(p-c)^n.$$

Atunci:

$$\prod\left(\frac{a^2-b^2}{r+r_c}\right)^n = \frac{p^n}{r^n}(a-b)^n(b-c)^n(c-a)^n,$$

tocmai relația pe care am voit să o demonstrez.

ION O ZAHARIA
lic. Constanța.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIV, No. 1, Septembrie 1928. Lista Membrilor Societății „*Gazeta Matematică*". Premiul „Inginer *H. Capriel*. Identități trigonometrice, de *G. Bratu*. Asupra punctelor izogonale, de *Sublocot*. *M. Focșeneanu*.

2. *G. Vrânceanu*. Sur les solutions périodiques complétement stables. (Extrait des *Comptes rendus* des séance de l'Académie des Sciences, 5 Mars, 1928).

3. *G. Vrânceanu*. Sur les solutions périodiques à périodes très longues (Comptes rendus, 19 Mars 1928).

4. *G. Vrânceanu*. Sur quelques tenseurs dans les variétés non holonomes. (Comptes rendus, 5 Avril 1928).

5. *G. Vrânceanu*. Sur la stabilité trigonométrique de l'équilibre dans la Dynamique (Rendiconti della R Accademia nationale dei Lincei, dicembre 1927).

6. *G. Vrâneeanu*. Sullo scostamento geodetico nelle varietà anolonome. (Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei, gennaio 1928).

PROBLEME REZOLVATE

708*. — *Se dă cercul*, $x^2+y^2=r^2$. *In punctele* $B(0, r)$ *și* $B'(0, -r)$ *se duc tangente. Pe tangenta în* $B(0, r)$ *se ia punctul* $A(a, r)$, *de unde se duce tangenta* AC *la cercul dat. Această tangentă întâlnește tangenta în* B' *în punctul* A'.

1°. Să se scrie ecuațiile laturilor triunghiului ABC.

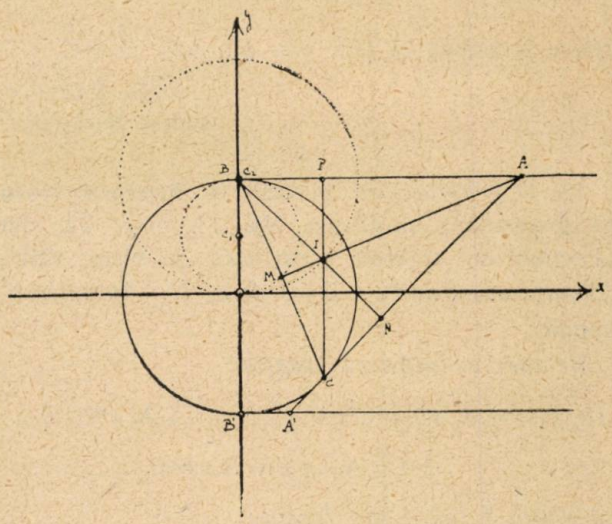
2°. Să se scrie ecuațiile înălțimelor triunghiului ABC *și să se verifice că sunt concurente.*

3°. Să se arate că produsul, $\overline{AB} \cdot \overline{A'B'}$ = *constant.*

4°. Presupunând punctul A *mobil pe tangenta* B A, *să se afle locul geometric al punctului* M *de intersecție al coardei* BC *cu înălțimea din* A.

5°. Locul geometric al ortocentrului triunghiului. Pentru cazul numeric, se va lua, $r=5$ *și* $a=12$.

I. DIMITRIU-ARAD



Construim figura în condițiile problemei.

1°. Ecuația dreptei AB, este:

$$y = r. \tag{1}$$

BC fiind polara punctului $A(a, r)$ în raport cu cercul, $x^2+y^2=r^2$, ecuația ei este:

$$ax + ry - r^2 = 0. \tag{2}$$

Pentru a scri și ecuația dreptei AC să aflăm întâi coordonatele lui C. Aflăm astfel intersecția dreptei (2), cu cercul. Din (2) scoatem:

$$y = \frac{r^2 - ax}{r},$$

care înlocuită în ecuația cercului, ne dă:

$$x^2 + \frac{(r^2-ax)^2}{r^2} = r^2,$$

sau:

$$(a^2+r^2)x^2 - 2ar^2x = 0$$

$$\therefore \quad x = 0 \quad \text{și} \quad x = \frac{2ar^2}{a^2+r^2}.$$

De unde deducem respectiv:

$$y = r \quad \text{şi} \quad y = \frac{r^2 - \frac{2a^2r^2}{a^2+r^2}}{r} = \frac{r(r^2-a^2)}{a^2+r^2}.$$

Coordonatele punctului C, sunt deci:

$$C\left(\frac{2ar^2}{a^2+r^2}, \frac{r(r^2-a^2)}{a^2+r^2}\right).$$

Atunci ecuaţia dreptei AC, este:

$$y - r = \frac{r\left(\frac{r^2-a^2}{a^2+r^2} - 1\right)}{a\left(\frac{2r^2}{a^2+r^2} - 1\right)}(x-a) = -\frac{2ar}{r^2-a^2}(x-a)$$

sau:

$$(3) \qquad 2arx + (r^2-a^2)y - r(a^2+r^2) = 0.$$

Ecuaţiile (1), (2), (3) reprezintă laturile AB, BC, AC, a triunghiului ABC.

2°. Ca să scrim ecuaţiile înălţimelor triunghiului ABC, vom observa că ele trec prin vârfurile triunghiului şi sunt perpendiculare pe laturi, adică coeficienţii lor unghiulari sunt inverşi şi de semne contrare cu acei ai laturilor corespunzătoare.

Astfel, înălţimea AM, are ca ecuaţie:

$$y - r = \frac{r}{a}(x \quad a) \quad \text{sau:} \quad (4) \quad y = \frac{r}{a}x,$$

trece deci prin O.

Înălţimea BN, are ca ecuaţie:

$$(5) \qquad y - r = \frac{r^2-a^2}{2ar}x.$$

Înălţimea CP, fiind paralelă cu axa Oy, are ca ecuaţie:

$$(6) \qquad x = \frac{2ar^2}{a^2+r^2}.$$

Ecuaţiile (4), (5) şi (6) scriu ecuaţiile înălţimelor AM, BN, CP ale triunghiului ABC. Să verificăm acum că înălţimele sunt concurente.

Eliminând pe y între ecuaţiile (4) şi (5), obţinem absciza punctului de întâlnire a înălţimelor AM, BN, avem:

$$\frac{r}{a}(x-a) = \frac{r^2-a^2}{2ar}x$$

$$\therefore \quad x = \frac{2ar^2}{a^2+r^2}.$$

Vedem dar că înălţimele AM, BN, se întâlnesc într'un punct care are aceiaşi absciză ca înălţimea CP, cele trei înălţimi sunt concurente.

3°. Coordonatele punctului A′ sunt date de ecuaţiile:

$$y = -r, \quad 2arx + (r^2-a^2)y - r(a^2+r^2) = 0,$$

ale dreptelor B′A′, AC.

Inlocuind în a 2-a ecuaţie pe y cu $-r$, avem:

$$2arx - (r^2-a^2)r - r(a^2+r^2) = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{r^2}{a}.$$

Coordonatele lui A′, sunt:

$$A'\left(\frac{r^2}{a}, \quad -r\right).$$

Acum, observăm uşor, că lungimile lui AB şi A′B′, sunt:

$$AB = a, \quad A'B' = \frac{r^2}{a},$$

deci:

$$\overline{AB} \cdot \overline{A'B'} = a\frac{r^2}{a} = r^2 = \text{constant}.$$

4°. Punctul M, aflându-se la intersecţia dreptelor BC şi AM, coordonatele lui satisface ecuaţiile acestor drepte:

$$ax + ry - r^2 = 0, \quad y = \frac{r}{a}x.$$

Eliminând parametrul a între aceste ecuaţii, aflăm locul lui M.

Din a 2-a ecuaţie, deducem:

$$a = \frac{rx}{y},$$

care introdusă în prima, ne dă:

$$\frac{rx^2}{y} + ry - r^2 = 0$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 - ry = 0.$$

Locul geometric al lui M este deci un cerc, cu centrul pe Oy, în C_1, coordonatele find $\left(0, \frac{r}{2}\right)$.

Observare. Locul lui M se observă şi geometriceşte că este cercul C_1, unghiul OMB fiind drept şi OB constant.

5°. Coordonatele ortocentrului I, satisfac ecuațiile:

$$x = \frac{2ar^2}{a^2+r^2}, \quad y = \frac{r}{a}x.$$

Eliminând pe a între aceste ecuații, avem ecuația locului lui I. Scoțând pe a din ecuația a 2-a și înlocuindu-l în prima, avem:

$$x = \frac{2\frac{r^3x}{y}}{\frac{r^2x^2}{y^2}+r^2} = \frac{2rxy}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \quad x^2+y^2-2ry=0.$$

Locul geometric al ortocentrului triunghiului ABC, este deci un cerc cu centru $(0, r)$ și raza r.

Observare. Putem găsi și geometriceşte locul punctului I. Astfel observăm că unghiurile BOM și BIM sunt egale, primul având compliment unghiul BAM și al 2-lea unghiul MBI și aceste două unghiuri sunt egale, patrulaterul BMNA fiind inscriptibil. Triunghiul BOI fiind isoscel, rezultă, că: $BI=BO=r$, locul lui I este un cerc cu centru în B sau C_2 și cu raza r.

Cazul numeric. Rezultatele găsite mai sus, devin:

1°. $y=5, \quad 12x+5y-25=0,$

$$120x-119y-845=0$$

2°. $y=\frac{5}{12}x, \quad y-5=\frac{-119}{120}x, \quad x=\frac{600}{169}$

3°. $\overline{AB}\,.\,\overline{A'B'}=25$

4°. $x^2+y^2-5y=0$

5°. $x^2+y^2-10y=0.$

Soluții date de d-nii: *Bucurescu Ion* (Pitești), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (Galați), *Dumitrescu Nicolae* (Timișoara), *Ganea D. Vasile* (București), *Gheorghiu Th. Gh.* (Galați), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Ghișoiu I. Petre* (București), *Hantilă Florea* (Caransebeș), *Hohoi V.* (Brașov), *Iancu David* (Iași), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeș), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Craiova), *Marinaș Marin* (Șc. Milit. de Geniu), *Micula O.* (Timișoara), *Mihuț Metodie* (Caransebeș), *Oigenstein D.* (Bălți), *Pantu Z. Ion* (București), *Popescu C. Virgiliu* (Șc. Electrotechnică, Nancy), *Roman I. Ioan* (București), *Savin Arnold* (Focșani), *Scurtu A. Nicolae* (Brașov), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Secăroiu D-tru* (Brașov), *Sirchis I.* (Tighina), *Sprînceană Gheorghe* (Galați), *Șoimu Ilie* (Caransebeș), *Stan I. Aurelian* (Șc. Milit., Iași), *Vâlceanu Justin* (Tg.-Jiu) și *Vonica C. Ioan* (Tg.-Jiu).

716. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^3\sqrt[6]{y}-y\sqrt[3]{x}=a \\ x^3\sqrt[6]{y}+iy\sqrt[3]{x}=b\left(x^3\sqrt[6]{y}-iy\sqrt[3]{x}\right)^{-1}, \end{cases}$$

unde $i=\sqrt{-1}$.

NICOLAE O. ZAHARIA

Dacă notăm:

$$x^3\sqrt[6]{y}=u, \quad -y\sqrt[3]{x}=v,$$

sistemul propus, devine:

$$\begin{cases} u+v=a \\ u-iv=b(u+iv)^{-1}. \end{cases}$$

Inmulțind ecuația 2-a cu $u+iv$, obținem sistemul:

$$(1) \quad \begin{cases} u+v=a \\ u^2+v^2=b. \end{cases}$$

Ridicând prima ecuație la patrat și scăzând a 2-a, obținem:

$$uv=\frac{a^2-b}{2}.$$

Sistemul (1) este deci echivalent cu:

$$\begin{cases} u+v=a \\ uv=\frac{a^2-b}{2}. \end{cases}$$

Având suma și produsul cunoscute, u și v sunt rădăcinele ecuației:

$$z^2-az+\frac{a^2-b}{2}=0,$$

de unde deducem:

$$u=\frac{a+\sqrt{2b-a^2}}{2}=A, \quad -v=\frac{\sqrt{2b-a}-a}{2}=B,$$

sau:

$$u=B, \quad v=A.$$

Reîntorcându-ne la necunoscutele sistemului dat, putem scri:

$$\begin{cases} x^3\sqrt[6]{y}=A \\ y\sqrt[3]{x}=B, \end{cases} \quad \text{sau:} \quad \begin{cases} x^3\sqrt[6]{y}=B \\ y\sqrt[3]{x}=A. \end{cases}$$

Mai putem scrì încă:

$$\begin{cases} x^{18}y = A^6 \\ y^3 x = B^3, \end{cases} \quad \text{sau:} \quad \begin{cases} x^{18}y = B^6 \\ y^3 x = A^3. \end{cases}$$

Ridicând la puterea 3-a primele ecuații și împărțindu-le cu ecuațiile a 2-a, găsim:

$$x^{53} = \frac{A^{18}}{B^3} \quad \text{sau:} \quad x^{53} = \frac{B^{18}}{A^3}.$$

Analog găsim:

$$y^{53} = \frac{B^{54}}{A^6} \quad \text{sau:} \quad y^{53} = \frac{A^{54}}{B^6}.$$

Sistemul dat este echivalent cu sistemele:

$$\begin{cases} x^{53} = \frac{A^{18}}{B^3} \\ y^{53} = \frac{B^{54}}{A^6}, \end{cases} \quad \begin{cases} x^{53} = \frac{B^{18}}{A^3} \\ y^{53} = \frac{A^{54}}{B^6}. \end{cases}$$

Rezolvând aceste sisteme, găsim:

$$\begin{cases} x = \sqrt[53]{\frac{A^{18}}{B^3}}\left(\cos\frac{2k\pi}{53} + i\sin\frac{2k\pi}{53}\right) \\ y = \sqrt[53]{\frac{B^{54}}{A^6}}\left(\cos\frac{2k\pi}{53} + i\sin\frac{2k\pi}{53}\right), \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2..52)$$

sau:

$$\begin{cases} x = \sqrt[53]{\frac{B^{18}}{A^3}}\left(\cos\frac{2k\pi}{53} + i\sin\frac{2k\pi}{53}\right) \\ y = \sqrt[53]{\frac{A^{54}}{B^6}}\left(\cos\frac{2k\pi}{53} + i\sin\frac{2k\pi}{53}\right), \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2..52)$$

Soluții date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjan Petre* (lic. Caransebeș), *Arganini Victor* (lic. Pitești), *Carp Ig.* (lic. Chișinău), *Climescu C. Al.* (Semin. Pedag.. Iași), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Costăchescu V. C.tin* (lic. Milit., Iași), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Oheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Iacob Șt. Eugen* (Sublocot. de Artilerie), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Licev Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Lupu Nicolae* (lic. Galați), *Marinaș B. Marin* (Șc. Milit. de Geniu), *Micula O.* (Timișoara), *Milea G. Ene* (lic. R.-Sărat), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Neacșu Vasile* (Șc. Polit., Timișoara), *Nichiforescu Gh. Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Panțu Z. Ion*, *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Scurtu A. Nicolae* (Brașov), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Silvian Emil* (lic. Lazăr, București), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași) și *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

A mai trimes soluții, d-l: *Hamparțum Grigore* (lic. Constanța).

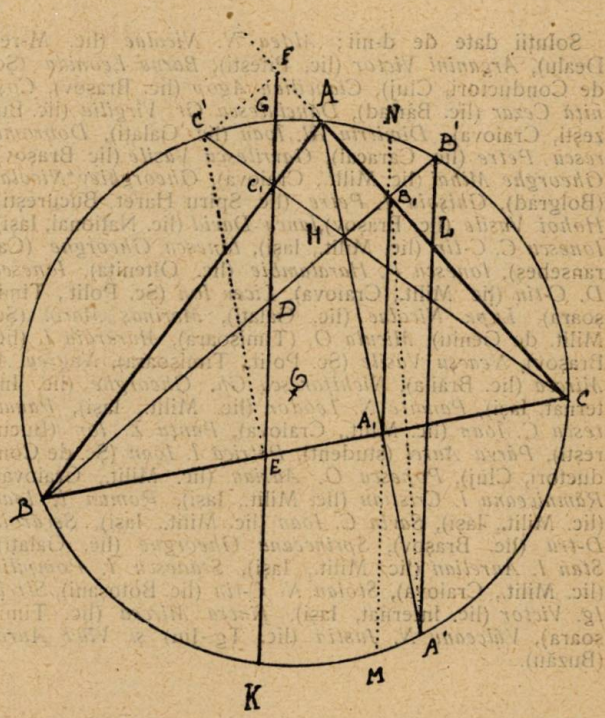
Observare. D-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați) *Iacob Șt. Eugen* (Sublocot. de Artilerie), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Sprinceană Gh. Gheorghe* (lic. Galați), au generalizat problema, astfel:

$$\begin{cases} x^m y^n - x^p y^q = a \\ x^m y^n + i\,x^p y^q = b(x^m y^n - i\,x^p y^q)^{-1} \end{cases}$$

unde $i = \sqrt{-1}$. Soluție analoagă cu cea de mai sus.

718. — *Se dă un triunghiu* ABC. *Se duc înălțimele, care întâlnesc laturile opuse și cercul circumscris triunghiului respectiv, în punctele* A_1, B_1, C_1 *și* A′, B′, C′. *Să se arate că dreptele* A_1B_1 *și* A′B′ *sunt paralele cu dreapta lui Simpson a punctului* C′.

COSTACHESCU V. C-TIN



Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimelor triunghiului ABC, A′, B′, C′ punctele unde ele taie cercul C′. circumscris și FE dreapta lui *Simpson* a punctului Ducem dreptele A_1B_1 și A′B′. Din patrulaterele inscriptibile HA_1CB_1 și C′FCE, rezultă respectiv:

$$\sphericalangle HA_1B_1 = \sphericalangle HCB_1$$

$$\sphericalangle C'EF = \sphericalangle C'CF = \sphericalangle HCB_1.$$

Din aceste relaţii, rezultă:

$$\sphericalangle HA_1B_1 = \sphericalangle C'EF,$$

şi cum aceste unghiuri au câte două laturi paralele C'E şi AA' ca fiind perpendiculare pe BC, urmează că şi A_1B_1 este paralelă cu dreapta lui *Simpson*, FE. Considerăm apoi patrulaterele inscriptibile, ABA'B' şi ABA_1B_1 şi putem scri:

$$\sphericalangle HA'B' = \sphericalangle ABB'$$

$$\sphericalangle HA_1B_1 = \sphericalangle ABB',$$

rezultă deci:

$$\sphericalangle HA'B' = \sphericalangle HA_1B_1,$$

şi cum au o latură comună, urmează că A'B' e paralelă cu A_1B_1 şi deci şi cu dreapta lui *Simpson* FE.

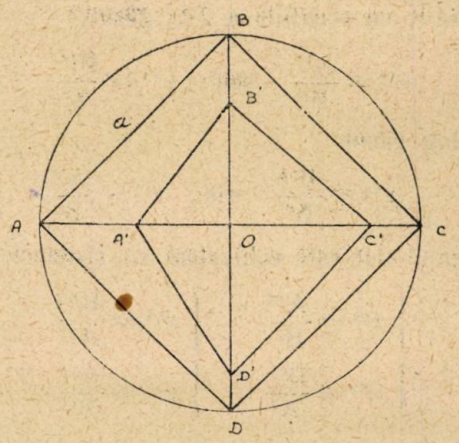
Soluţii date de d-nii; *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Arganini Victor* (lic, Piteşti), *Barna Leonida* (Şc. de Conductori, Cluj), *Ciancilian Agop* (lic. Braşov), *Coşniţă Cezar* (lic. Bârlad), *Dănciulescu Gr. Vîrgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dimitriu Al. Ioan* (lic. Galaţi), *Dobromirescu Petre* (lic. Caracal), *Gavrilescu Vasile* (lic. Braşov), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiev Nicolae* (Bolgrad), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Hohoi Vasile* (lic. Braşov), *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeş), *Ionescu P. Haralambie* (lic. Oltenita), *Ionescu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Licev Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *Lupu Nicolae* (lic. Galaţi), *Marinaş Marin* (Şc. Milit. de Geniu), *Micula O.* (Timişoara), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Neacşu Vasile* (Şc. Polit., Timişoara), *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila), *Nichiforescu Gh. Gheorghe* (lic. Internat, Iaşi), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iaşi), *Panaitescu C. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Panţu Z. Ion* (Bucureşti), *Pârvu Aurel* (student), *Petrică I. Ioan* (Şc. de Conductori, Cluj), *Popescu O. Adrian* (lic. Milit., Craiova), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Roman I. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Stănescu I. Pompiliu* (lic. Milit., Craiova), *Stoian N. C-tin* (lic. Botoşani), *Streit Ig. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Ţiucra Mircea* (lic. Timişoara), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) şi *Vlad Aurel* (Buzău).

719*. — *Se dă un patrat* ABCD *şi* O *centrul său. Pe* AO, BO, CO *şi* DO *se iau punctele* A', B', C', D' *astfel ca:*

$$AA' = \frac{AO}{2},\ BB' = \frac{BO}{3},\ CC' = \frac{CO}{4},\ DD' = \frac{DO}{5}.$$

Se cere suprafaţa patrulaterului A'B'C'D' *în funcţie de latura a a patrulaterului* ABCD. *Să se trateze aceiaşi chestiune pentru un poligon regulat dat.*

V. ALACI



Suprafaţa patrulaterului A'B'C'D', este evident egală cu suma celor patru triunghiuri dreptunghice din O, adică:

$$(1)\quad s(A'B'C'D') = s(A'OB') + s(B'OC') + s(C'OD') + s(D'OA').$$

a fiind latura patratului, avem:

$$OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

şi atunci rezultă că putem scri:

$$s(A'OB') = \frac{OA' \cdot OB'}{2} = \frac{\frac{a}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2a}{3\sqrt{2}}}{2} = \frac{a^2}{12}$$

$$s(B'OB') = \frac{OB' \cdot OC'}{2} = \frac{\frac{2a}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3a}{4\sqrt{2}}}{2} = \frac{a^2}{8}$$

$$s(C'OD') = \frac{OC' \cdot OD'}{2} = \frac{\frac{3a}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{4a}{5\sqrt{2}}}{2} = \frac{3a^2}{20}$$

$$s(D'OA') = \frac{OD' \cdot OA'}{2} = \frac{\frac{4a}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2\sqrt{2}}}{2} = \frac{a^2}{10}.$$

Înlocuind în (1) aceste valori, găsim:

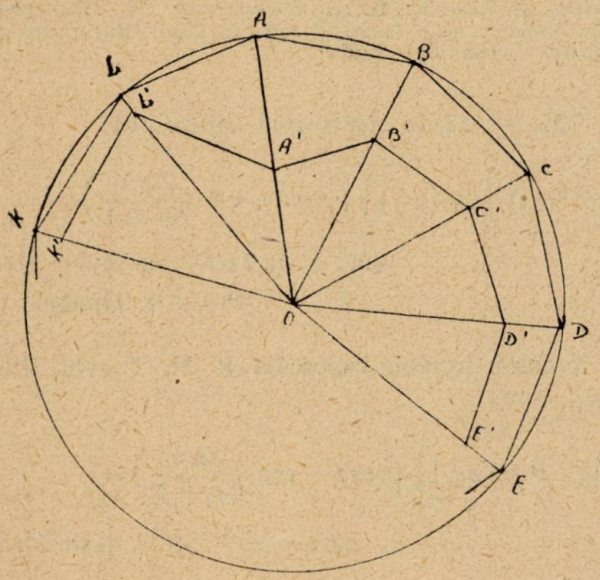
$$s(A'B'C'D') = \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{8} + \frac{3a^2}{20} + \frac{a^2}{10} = \frac{11a^2}{24}.$$

Generalizare. Fie poligonul regulat ABCDE... KL *de n laturi cu centru* O. *Pe laturile* AO, BO, CO,... KO, LO, *se iau punctele* A', B', C',... K', L' *astfel ca:*

$$AA' = \frac{AO}{2},\ BB' = \frac{BO}{3},\ CC' = \frac{CO}{4},\ \ldots$$

$$KK' = \frac{KO}{n},\ LL' = \frac{LO}{n+1}$$

Se cere suprafața poligonului A'B'C'...K'L', *în funcție de latura a a poligonului regulat dat.*



Observăm, că:

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \ldots = \sphericalangle KOL = \frac{2\pi}{n},$$

și deci:

$$(2)\quad s(A'B'C'\ldots K'L') = s(A'OB') + s(B'OC') + \ldots$$

$$\ldots + s(K'OL') + s(L'OA') = \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{2}(OA'.OB' +$$

$$OB'.OC' + \ldots + OK'.OL' + OL'.OA').$$

Considerând înălțimea OA_1 a triunghiului AOB, putem scrie:

$$A_1B = \frac{a}{2} = OB\sin\frac{\pi}{n},$$

deci:

$$OA = OB = \ldots = OL = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}},$$

și ținând seamă de enunț, avem:

$$OA' = \frac{a}{4\sin\frac{\pi}{n}},\ OB' = \frac{2a}{6\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$OC' = \frac{3a}{8\sin\frac{\pi}{n}},\ \ldots OL' = \frac{na}{2(n+1)\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Atunci, relația (2) devine:

$$s(A'B'C'\ldots K'L') = \frac{a^2\sin\frac{2\pi}{n}}{8\sin^2\frac{\pi}{n}}\left[\frac{1.2}{2.3} + \frac{2.3}{3.4} + \right.$$

$$\left. \frac{3.4}{4.5} + \ldots + \frac{(n-1)n}{n(a+1)} + \frac{n}{2(n+1)}\right]$$

sau:

$$s(A'B'C'\ldots K'L') = \frac{a^2\cot\frac{\pi}{n}}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + \frac{n-1}{n+1} + \frac{n}{2(n+1)}\right] =$$

$$\frac{a^2\cot\frac{\pi}{n}}{4}\left[\frac{n}{2n+2} + \sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\right].$$

Deci:

$$s(A'B'C'\ldots K'L') = \frac{a^2\cot\frac{\pi}{n}}{4}\left[\frac{n}{2n+2} + n\right.$$

$$\left. - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\right].$$

In cazul particular, $n = 4$, avem:

$$s(A'B'C'D') = \frac{a^2}{4}\left(\frac{2}{5} + 4 - 1 -\right.$$

$$\left. \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) = \frac{11a^2}{24}.$$

Soluții date de d-nii: *Arganini Victor* (lic. Pitești), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu At. Ion* (lic. Galați), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), *Micula O.* (Timișoara), *Murăroiu Ioan* (lic. Brașov),

Nichiforescu Gh. Gheorghe (lic. Internat, Iaşi), *Panţu Z. Ioan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi) şi *Pârvu Aurel* (Buzău).

Au soluţionat problema numai pentru cazul patrulaterului A′ B′ C′ D′, d-nii: *Almăjan Petru* (lic. Caransebeş), *Barna Leonida* (Şc. de Conductori, Cluj), *Băncilă Gheorghe* (Cluj), *Boroianu D. C-tin* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Cincilian Agop* (lic. Braşov), *Coşniţă Cezar* (lic. Bârlad), *Gavrilescu Vasile* (lic Braşov), *Georgescu I. Petru* (T.-Severin), *Gheorghiev Nicolae* (Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret Bucureşti), *Handler Gheorghe*, *Hohoi Vasile* (lic. Braşov), *Iacob Eugen* (Sublocot. de Artilerie), *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Licev Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *Lupu Nicolae* (lic. Galaţi)) *Pascal I.* (lic. Roman), *Rapaport Leon* (lic. Kogălniceanu, Iaşi), *Răşcanu C-tin* (lic. Kogălniceanu, Iaşi), *Rivaleta B. Victor* (lic. Kogălniceanu, Iaşi), *Saur Ion* (lic. Arad), *Savin C. Ion* (lic. Milit., Iaşi), *Silvian Emil* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Scurtu Nicolae*, *Sirchis Iosef* (lic. Tighina), *Stratulat Paul* (Braşov), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) şi *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanţa).

Observare. Cu toate că chestiunea era uşoară şi cerea numai atenţiune de calcule, foarte multe soluţii au fost greşite şi deci neluate în seamă.

723. — *Să se demonstreze că expresia:*

$$n^1(n-1)+(n-1)^2(n-2)\,C_n^1\,a+$$
$$(n-2)^2(n-3)\,C_n^2\,a^2+\ldots+2^2\,C_n^{n-2}\,a^{n-2},$$

este divizibilă prin $2a+r$ *şi să se găsească câtul.* GH. SPRINCEANA

Consider desvoltarea cunoscută:

$$(x+1)^n=x^n+C_n^1\,x^{n-1}+C_n^2\,x^{n-2}+\ldots+C_n^1\,x+1$$

pe care derivând-o în raport cu x, obţinem:

$$n(x+1)^{n-1}=n\,x^{n-1}+(n-1)\,C_n^1\,x^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+2\,C_n^2\,x+C_n^1.$$

Inmulţind cu x şi derivând din nou, avem:

$$n(n-1)\,x\,(x+1)^{n-2}+n\,(x+1)^{n-1}=$$
$$n^2\,x^{n-1}+(n-1)^2\,x^{n-2}+\ldots+2^2\,C_n^2\,x.$$

Derivând din nou în raport cu x, avem:

$$(1)\quad 2n(n-1)(x+1)^{n-2}+n(n-1)(n-2)\,x(x+1)^{n-3}$$
$$=n^2(n-1)\,x^{n-2}+(n-1)^2(n-2)\,C_n^1\,x^{n-3}+$$
$$(n-2)^2(n-3)\,C_n^2\,x^{n-4}+\ldots+2^2\,C_n^{n-2}.$$

Făcând transformarea: $x=\frac{1}{a}$

şi scăpând de numitori, înmulţind cu a^{n-2}, găsim schimbând ordinea celor doi membrii din (1):

$$n^2(n-1)+(n-1)^2(n-2)\,C_n^1\,a+$$
$$(n-2)^2(n-3)\,C_n^2\,a^2+\ldots+2^2\,C_n^{n-2}\,a^{n-2}=$$
$$n(n-1)(1+a)^{n-3}(2a+2+n-2)=$$
$$n(n-1)(1+a)^{n-3}(2a+n).$$

Această egalitate ue spune că expresiunea dată este divizibilă prin $2a+n$, câtul fiind:

$$n(n-1)(1+a)^{n-3}.$$

Soluţii date de d-nii: *Arganini Victor* (lic. Piteşti), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galaţi), *Nichiforescu Gh. Gheorghe* (lic Internat Iaşi), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti) şi *Roman I. Ioan* (Bucureşti).

726. — *Să se stabilească identitatea:*

$$2^{p+2}\sin^2\frac{t}{2}\sin p\,t\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{2p+1}\right)=$$
$$\sin t+\sin 2p\,t-\sin(2p+1)\,t.$$

PETRE I. GHISOIU

Folosim formula cunoscută (R. M, T., vol. VII, pag. 141),

$$(1)\quad 2^p\sin p\,t\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{2p+1}\right)=$$
$$\sin t+\sin 2t+\ldots+\sin 2p\,t.$$

Dar:

$$\sin t+\sin 2t+\ldots+\sin 2p\,t=$$
$$\frac{\sin p\,t\sin\frac{(2p+1)\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{(4p+1)\,t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

(Trigonometrie, F. G. M., pag. 44), astfel că relaţia (1) devine:

$$2^p\sin p\,t\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{2p+1}\right)=$$
$$\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{(4p+1)\,t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}},$$

sau:

$$2^{p+2}\sin^2\frac{t}{2}\sin p\,t\prod_{k=1}^{p}\left(\cos t-\cos\frac{2k\pi}{2p+1}\right)=$$

$$2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{(4p+1)t}{2}=$$

$$\sin t+\sin 2p\,t-\sin(2p+1)t,$$

care este tocmai identitatea cerută.

Soluții date de d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Panaite N. Teodor* (lic. Milit., Iași), *Pantu Z. Ion* (București), *Râmniceanu I. Cristian* (iic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (București), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăroiu D-tru, Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați) și *Stan I. Aurelian.*

A mai trimes soluții d-l: *Micula O.* (Timișoara).

727. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\frac{\alpha a^n h_a^n+\beta b^n h_b^n+\gamma c^n h_c^n}{\alpha r_a^n\cot^n\frac{A}{2}+\beta r_b^n\cot^n\frac{B}{2}+\gamma r_c^n\cot^n\frac{C}{2}}=2^n r^n,$$

notațiile fiind cele obicinuite, iar α, β, γ *sunt numere oarecare.* EUGEN ȘT. IACOB

Relațiile cunoscute:

$$a h_a=b h_b=c h_c=2s,$$

ridicându-le la puterea n^a, avem:

$$a^n h_a^n=b^n h_b^n=c^n h_c^n=2^n s^n$$

(1) $\therefore\ \alpha a^n h_a^n+\beta b^n h_b^n+\gamma c^n h_c^n=2^n s^n(\alpha+\beta+\gamma).$

Tot astfel relațiile cunoscute:

$$r_a\cot\frac{A}{2}=r_b\cot\frac{B}{2}=r_c\cot\frac{C}{2}=p,$$

ridicate la puterea n^a, devin:

$$r_a^n\cot^n\frac{A}{2}=r_b^n\cot^n\frac{B}{2}=r_c^n\cot^n\frac{C}{2}=p^n$$

(2) $\therefore\ \alpha r_a^n\cot^n\frac{A}{2}+\beta r_b^n\cot^n\frac{B}{2}+\gamma r_c^n\cot^n\frac{C}{2}=p^n(\alpha+\beta+\gamma).$

Împărțind relațiile (1) și (2) și ținând seamă, că:

$$\frac{s}{p}=r,$$

obținem:

$$\frac{\alpha a^n h_a^n+\beta b^n h_b^n+\gamma c^n h_c^n}{\alpha r_a^n\cot^n\frac{A}{2}+\beta r_b^n\cot^n\frac{B}{2}+\gamma r_c^n\cot^n\frac{C}{2}}=2^n\left(\frac{s}{p}\right)^n=2^n r^n,$$

adică tocmai identitatea cerută.

Soluții date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjan Petru* (lic. Caransebeș), *Arganini Victor* (lic. Pitești), *Băjenescu A. Pantelie* (lic. Caracal), *Bâcicov Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov Victor* (lic. Tighina), *Bucurescu Ioan* (Șc. Mil. it. de Geniu), *Cincilian Agop* (lic. Brașov), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag., Iași), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiev Nicolae* (Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Guha Felix* (Caransebeș), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeș), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Licev Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Marinaș B. Marin* (Șc. Milit. de Geniu, București), *Micula O.* (Timișoara), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Negreu A. Mircea* (lic. Brăila), *Nichiforescu Gh. Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Panaite N. Theodor* (lic. Milit., Iași), *Pantu Z. Ion* (București), *Petrovici D-tru* (lic. Câmpina), *Rapaport Leon* (lic. Kogălniceanu, Iași), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Rășcanu C-tin* (lic. Kogălniceanu, Iași), *Roman I. Ioan* (București), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Savin Arnold* (lic. Focșani), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Scarlat D.* (lic. Câmpina), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

A mai trimes soluții d-l: *Hampartum Grigore* (lic. Constanța).

730. — *Să se descompună numărul 42, în patru numere întregi pozitive, care să fie în progresie aritmetică.*

SUBLOCOT. EUGEN ST. IACOB

Fie a primul termen și r rația, avem:

$$a+a+r+a+2r+a+3r=42$$

$$\therefore\ 2a+3r=31,$$

de unde:

$$a=\frac{3(7-r)}{2}.$$

Trebue să luăm:

$$r=1,\ 3,\ 5,\ 7,$$

pentru care corespunde:

$$a=9,\ 6,\ 3,\ 0.$$

Avem deci următoarele progresii aritmetice, a căror sumă este 42:

$$\div\ 9\,.\,10\,.\,11\,.\,12$$

$$\div\ 6\,.\,9\,.\,12\,.\,15$$

$$\div\ 3\,.\,8\,.\,13\,.\,18$$

$$\div\ 0\,.\,7\,.\,14\,.\,21.$$

Soluții date de d-nii: *Almăjan Petru* (Caransebeș), *Arganini Petru* (lic. Pitești), *Băjenescu Pantelie* (lic. Caracal), *Băncilă Gheorghe* (Bran), *Bârloiu D. Nicolae* (lic. Târgoviște), *Boroianu D. C-tin* (lic. Matei-Basarab, București), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Ciupe Aëțiu* (lic. Bistrița), *Codreș I. Florea* (lic. Milit., Craiova), *Constantin V. Șt.* (lic. Botoșani), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Georgescu Telemac Petru* (lic. T.-Severin), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiev Nicolae*, *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Iotta D. Mihail* (lic. T.-Severin), *Licev Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Magda Ovidiu* (lic. Cluj), *Mocănescu C. Ioan* (lic. Târgoviște), *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila), *Nichiforeseu Gh. Gh.* (lic. Internat Iași), *Oigenstein David* (lic. Bălți), *Panțu Z. Ion* (Bucureșri), *Pârvu Aurel* (student), *Popescu O. Adrian* (lic. Milit., Craiova), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (București), *Sabetay Andrei* (T.-Severin), *Sassu V. Ioan* (lic. Tg.-Mureș), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Silvian Emil* (lic. Lazăr, București), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stratulat Paul* (Brașov), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara), și *Vâlsănescu Viorel* (lic. Pitești).

PROBLEME PROPUSE

759. — Se cere cubul perfect de cinci cifre, astfel ca cifra a patra să fie rădăcina patrată a numărului format de cifra întâia și a treia, ultima cifră să fie rădăcina patrată a numărului format de cifrele a treia și a patra, iar suma cifrelor cubului să fie un număr prim.

I. ILIUȚA-DABULENI.

760. — Se dă un cerc I tangent interior unui cerc O, în punctul A. Dintr'un punct oarecare B luat pe cercul O, se duc tangentele la cercul I în C și D. Dreptele AC și AD întâlnesc cercul O în M și N. Dreapta MN taie tangentele, în F și E. Paralela la FC ce pleacă din E, taie dreapta CD în L. Să se arate că punctele F, D și mijlocul dreptei EL sunt coliniare.

SANDULESCU I. IOAN

761. — Se dă un triunghiu ABC înscris în cercul O și fie A_1, B_1, C_1 diametral opuse vârfurilor, iar A', B', C' proecțiile lui A_1, B_1, C_1 respectiv pe BC, CA, AB. Insemnăm apoi cu A'_b, A'_c, B'_c, B'_a, C'_a, C'_b proecțiile lui A', B', C' respectiv pe A_1B, A_1C, B_1C, B_1A, C_1A, C_1B. Să se arate că dreptele $A'_bA'_c$, $B'_cB'_a$, $C'_aC'_b$, taie pe BC, CA, AB în trei puncte colineare.

CEZAR COSNITA

762. — Dându-se produsul:

$$\Gamma_p(x) = \prod_{i=1}^{p} (x^i + C_m^i),$$

se cere:

1°. O relație de recurență cu ajutorul căreia s'ar putea calcula coeficienții puterilor lui x în $\Gamma_p(x)$, dezvoltat.

2°. Proprietățile coeficienților.

ION I. ROMAN

763. — Să se rezolve ecuația:

$$(a-1)\left[x^m + (1 + C_m^1 a)\, x^{m-1} + \ldots\right.$$
$$\ldots + (1 + C_2^1 a + C_3^2 a^2 + \ldots + C_m^{m-2} a^{m-2} +$$
$$\left. C_m^{m-1} a^{m-1})\, x\right] + a^{m+1} - 1 = 0.$$

ION Z. PANTU

764. — Să se stabilească identitățile:

$$\frac{1}{(1+i)^n} + \frac{e^{2ix}}{(1-i)^n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} e^{ix} \cos\left(x - \frac{3n\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{(1+i)^n} - \frac{e^{2ix}}{(1-i)^n} = \frac{(-1)^{n-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{2})^{n-2}} e^{ix} \sin\left(x - \frac{3n\pi}{4}\right),$$

unde, $i = \sqrt{-1}$.

V. ALACI

765. — Să se stabilească inegalitatea:

$$h_a r_a^2 + h_b r_b^2 + h_c r_c^2 \geqq 3 r_a r_b r_c,$$

notațiile fiind cele obicinuite, într'un triunghiu oarecare.

PETRE I. GHISOIU

766. — 1. Să se găsească mișcarea circulară la care accelerația tangențială este egală în valoare absolută cu accelerația centripetă.

2. Dacă masele în problema celor două corpuri se schimbă păstrându-și raportul dintre ele, cum se modifică mișcarea?

V. VALCOVICI

INFORMAȚIUNI

Fie-care problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Nu se pot lua în seamă pentru problemele de *Concurs,* de cât acelea sosite la timp și anunțate în revistă.

Problemele propuse de corespondenții înscriși la *Concurs,* se socotesc cu numărul de puncte corespunzător, ca oricărui rezolvător înscris pentru *Concurs.*

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi egate, putem trimete corespondenților noștri nu mere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

CARTEA ROMÂNEASCĂ

Sucursala Timişoara

ANUL VIII. 15 NOEMBRIE 1928 NO. 9

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI. O CLASA DE ECUATIUNI ALGEBRICE, CU RADACINI TRIGONOMETRICE.
2. NOTE MATEMATICE, 20, 21.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 717, 720, 729, 732.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vorfi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.

ANUL VIII — No. 9. TIMISOARA, 15 NOEMBRIE 1928

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

O CLASA DE ECUAȚIUNI ALGEBRICE, CU RADACINI TRIGONOMETRICE

de V. ALACI

1. Se cunosc unele ecuațiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice. Astfel sunt ecuațiunile binoame, acelea cu rădăcini de forma:

$$x = \sin\frac{a+2k\pi}{n}, \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1),$$

ce se obțin din dezvoltarea lui $\sin n\,a$ în funcție de $\sin a$, unde se pune $\sin a = x$, și acelea analoage unde se înlocuește sinusul, cu altă funcție trigonometrică elementară.

Asemenea, într'un articol din *„Gazeta Matematică"*, an. XVII, No. 11, m'am ocupat cu formarea unor ecuațiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice, folosind o metodă proprie.

In prezentul articol, voi evidenția o altă metodă, destul de simplă, care să permită formarea unei clase mai generale de ecuațiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice, cuprinzând pe acelea de care am vorbit mai sus.

In acest scop, vom folosi formulele lui *Euler:*

$$(1)\quad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}, \qquad (i=\sqrt{-1}),$$

și vom soluționa pe rând, propozițiile ce urmează.

2. *Să se formeze ecuația algebrică, cu rădăcinele:*

$$(2)\quad x = a\cos\frac{k\pi}{n} + b\sin\frac{k\pi}{n}, \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2n-1).$$

In virtutea formulelor lui *Euler,* relația (2) devine:

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) + \frac{b}{2i}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right).$$

Punând:

$$(3)\quad e^{\frac{ik\pi}{n}} = t,$$

avem:

$$x = \frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) + \frac{b}{2i}\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

$$\therefore \quad (a\,i+b)\,t^2 - 2\,i\,x\,t + a\,i - b = 0.$$

De aci deducem:

$$t = \frac{i\,x \pm \sqrt{i^2x^2 - a^2i^2 + b^2}}{a\,i+b} = \frac{x \pm \sqrt{x^2-a^2-b^2}}{a-b\,i}$$

Ridicând la puterea $2n$ și ținând seamă de relația (3), avem:

$$\left(\frac{x \pm \sqrt{x^2-a^2-b^2}}{a-i\,b}\right)^{2n} =$$

$$t^{2n} = e^{2ik\pi} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1.$$

Ecuația algebrică cerută, este:

$$(4)\quad \left(\frac{x \pm \sqrt{x^2-a^2-b^2}}{a-i\,b}\right)^{2n} = 1,$$

cu rădăcinele:

$$x = a\cos\frac{k\pi}{n} + b\sin\frac{k\pi}{n}, \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2n-1).$$

In ecuația (4), se va lua numai unul din semne.

Cazuri particulare. 1°. Pentru $a=1$, $b=i$, ecuația (4), devine:

$$(5)\quad x^{2n} - 1 = 0,$$

cu rădăcinele:

$$x = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}, \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2n-1).$$

Ecuația binoamă, este deci un caz particular al ecuației mai generale (4).

2°. Pentru, $a=0$, $b=1$, ecuația (4), devine:

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{-i}\right)^{2n}=1,$$

sau:

(6) $$(\sqrt{1-x^2}+ix)^{2n}=1,$$

cu rădăcinele:

$$x=\sin\frac{k\pi}{n},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2n-1).$$

3°. Pentru, $a=1$, $b=0$, ecuația (4), devine:

(7) $$(x+\sqrt{x^2-1})^{2n}=1,$$

cu rădăcinele:

$$x=\cos\frac{k\pi}{n},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2n-1).$$

4°. Pentru, $a=b=1$, ecuația (4), devine:

(8) $$(x+\sqrt{x^2-2})^{2n}=(1-i)^{2n}=2^n(-i)^n,$$

cu rădăcinele:

$$x=\cos\frac{k\pi}{n}+\sin\frac{k\pi}{n}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right),$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2n-1).$$

3. *Să se formeze ecuația algebrică, cu rădăcinele:*

(9) $$x=a\,\mathrm{tg}\frac{k\pi}{n}+b\cot\frac{k\pi}{n},\quad (k=1,\ 2,\ldots n-1)$$

In virtutea formulelor lui *Euler*, relația (9) se poate scri:

$$x=\frac{a}{i}\cdot\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}}+e^{-\frac{ik\pi}{n}}}+bi\,\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}+e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{-\frac{ik\pi}{n}}}.$$

Punând:

(10) $$e^{\frac{ik\pi}{n}}=t,$$

avem:

$$x=\frac{a}{i}\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}+bi\,\frac{t^2+1}{t^2-1}$$

$$\therefore\quad ix(t^4-1)=a(t^2-1)^2-b(t^2+1)^2,$$

sau:

$$(a-b-ix)t^4-2(a+b)t^2+a-b+ix=0.$$

De aci deducem:

$$t^2=\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2-x^2}}{a-b-ix}=$$

$$\frac{a+b\pm\sqrt{4ab-x^2}}{a-b-ix}.$$

Ridicând această relație la puterea n, ținând seamă de (10), avem:

$$\left(\frac{a+b\pm\sqrt{4ab-x^2}}{a-b-ix}\right)^n=t^{2n}=e^{2ik\pi}=1.$$

Ecuația algebrică cerută, este:

(11) $$(a+b\pm\sqrt{4ab-x^2})^n-(a-b-ix)^n=0,$$

cu rădăcinele:

$$x=a\,\mathrm{tg}\frac{k\pi}{n}+b\cot\frac{k\pi}{n},\quad (k=1,\ 2,\ldots n-1).$$

Cazuri particulare: 1°. Pentru, $a=0$, $b=1$, ecuația (11), devine:

$$(1\quad ix)^n-(-1-ix)^n=0,$$

unde am luat înaintea radicalului semnul minus, care convine.

Această ecuație se mai poate scri:

(12) $$(x+i)^n-(x-i)^n=0,$$

cu rădăcinele:

$$x=\cot\frac{k\pi}{n},\quad (k=1,\ 2,\ldots n-1).$$

2°. Pentru, $a=1$, $b=0$, ecuația (11) devine, luând semnul plus care convine, înaintea radicalului:

(13) $$(1+ix)^n-(1-ix)^n=0,$$

cu rădăcinele:

$$x=\mathrm{tg}\frac{k\pi}{n}\quad (k=1,\ 2,\ldots n-1).$$

3°. Pentru, $a=b=1$, ecuația (11), devine:

(14) $$(2\pm\sqrt{4-x^2})^n-(-ix)^n=0,$$

cu rădăcinele:

$$x=\mathrm{tg}\frac{k\pi}{n}+\cot\frac{k\pi}{n}=2\,\mathrm{cosec}\frac{2k\pi}{n},\quad (k=1,\ 2..n-1)$$

4°. Dacă în ecuația (11), luăm:

$$a=\frac{a_1+b_1}{2},\quad b=\frac{a_1-b_1}{2},$$

avem ecuația:

$$\left(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - b_1^2 - x^2}\right)^n - (b_1 - i\,x)^n = 0,$$

cu rădăcinele:

$$x = \frac{a_1 + b_1}{2} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n} + \frac{a_1 - b_1}{2} \cot \frac{k\pi}{n} =$$

$$a_1 \operatorname{cosec} \frac{2k\pi}{n} - b_1 \cot \frac{2k\pi}{n}.$$

Lăsând indicii la o parte, putem spune, că ecuația:

(15) $$\left(a \pm \sqrt{a^2 - b^2 - x^2}\right)^n - (b - i\,x)^n = 0,$$

are rădăcinele:

$$x = a \operatorname{cosec} \frac{2k\pi}{n} - b \cot \frac{2k\pi}{n}, \quad (k = 1, 2, \ldots n - 1).$$

4. *Să se formeze ecuația algebrică, cu rădăcinele:*

(16) $$x = \frac{a \cos \frac{k\pi}{n} + b \sin \frac{k\pi}{n}}{a_1 \cos \frac{k\pi}{n} + b_1 \sin \frac{k\pi}{n}}, \quad (k = 0, 1, 2 \ldots n-1).$$

In virtutea formulelor lui *Euler*, în care notăm:

$$e^{\frac{ik\pi}{n}} = t,$$

relația (16) se poate scri:

$$x = \frac{\frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{b}{2i}\left(t - \frac{1}{t}\right)}{\frac{a_1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{b_1}{2i}\left(t_1 - \frac{1}{t}\right)} =$$

$$\frac{a\,i\,(t^2 + 1) + b\,(t^2 - 1)}{a_1\,i\,(t^2 + 1) + b_1\,(t^2 - 1)}$$

$$\therefore \quad [(a_1 x - a)i + b_1 x - b]t^2 = (a - a_1 x)i + b_1 x - b.$$

Ridicând ambii membri la puterea n, și observând că:

$$t^{2n} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1,$$

obținem ecuația cerută:

(17) $$[(b_1 + a_1 i)x - (b + a\,i)]^n - [(b_1 - a_1 i)x - (b - a\,i)]^n = 0,$$

cu rădăcinele:

$$x = \frac{a \cos \frac{k\pi}{n} + b \sin \frac{k\pi}{n}}{a_1 \cos \frac{k\pi}{n} + b_1 \sin \frac{k\pi}{n}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n - 1).$$

Cazuri particulare; 1°. Dacă în ecuația (17), luăm:

$$a = a_1 = 1, \quad b = i, \quad b_1 = -i,$$

și împărțim apoi cu, $-(-2i)^n$, obținem ecuația:

(18) $$x^n - 1 = 0,$$

cu rădăcinele:

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n - 1).$$

2°. Pentru:

$$a = b_1 = 0, \quad b = a_1 = 1,$$

ecuația (17) devine, dupăce înmulțim cu $(-1)^n$:

(19) $$(1 - i\,x)^n - (1 + i\,x)^n = 0.$$

cu rădăcinele:

$$x = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n}. \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n - 1).$$

3°. Pentru:

$$a = b_1 = 1, \quad b = a_1 = 0,$$

ecuația (17) devine:

(20) $$(x - i)^n - (x + i)^n = 0,$$

cu rădăcinele:

$$x = \cot \frac{k\pi}{n}, \quad (k = 1, 2, \ldots n - 1].$$

4°. Pentru:

$$a = 0, \quad b = a_1 = b_1 = 1,$$

ecuația (17) devine:

(21) $$[(1 + i)x - 1]^n - [(1 - i)x - 1]^n = 0,$$

cu rădăcinele:

$$x = \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}\right)}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n - 1).$$

5°. Pentru:

$$b = 0, \quad a = a_1 = b_1 = 1,$$

ecuația (17) devine:

$$(22)\qquad [(1+i)x-i]^n-[(1-i)x+i]^n=0,$$

cu rădăcinele:

$$x=\frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1).$$

5. *Să se formeze ecuația algebrică, cu rădăcinele:*

$$(23)\qquad x=\frac{a+b\cos\frac{k\pi}{n}+c\sin\frac{k\pi}{n}}{a_1+b_1\cos\frac{k\pi}{n}+c_1\sin\frac{k\pi}{n}},$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2n-1).$$

În virtutea formulelor lui *Euler*, în care notăm:

$$e^{\frac{ik\pi}{n}}=t,$$

relația (23) se poate scrie:

$$x=\frac{a+\frac{b}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\frac{c}{2i}\left(t-\frac{1}{t}\right)}{a_1+\frac{b_1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\frac{c}{2i}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=$$

$$\frac{2iat+ib(t^2+1)+c(t^2-1)}{2ia_1t+ib_1(t^2+1)+c_1(t^2-1)}.$$

De aci deducem:

$$[(b_1x-b)i+c_1x-c]t^2+2(a_1x-a)it+$$
$$(b_1x-b)i-(c_1x-c)=0$$

Multiplicând cu $-i$, obținem:

$$[b_1x-b-(c_1x-c)i]t^2-2(a-a_1x)t+$$
$$b_1x-b+(c_1x-c)i=0.$$

Rezolvând în raport cu t, această ecuație, găsim:

$$t=\frac{a-a_1x\pm\sqrt{(a-a_1x)^2-(b_1x-b)^2-(c_1x-c)^2}}{b_1x-b-(c_1x-c)i}$$

Ridicând ambii membri la puterea $2n$, avem:

$$\left(\frac{a-a_1x\pm\sqrt{(a-a_1x)^2-(b_1x-b)^2-(c_1x+c)^2}}{b_1x-b_1-(cx-c)i}\right)^{2n}$$
$$=t^{2n}=e^{2ik\pi}=1.$$

Ecuația cerută, este deci:

$$(24)\quad [a-a_1x\pm\sqrt{(a-a_1x)^2-(b-b_1x)^2-(c-c_1x)^2}]^{2n}$$
$$-[(b_1-ci)x-(b-ci)]^{2n}=0,$$

cu rădăcinele:

$$x=\frac{a+b\cos\frac{k\pi}{n}+c\sin\frac{k\pi}{n}}{a_1+b_1\cos\frac{k\pi}{n}+c_1\sin\frac{k\pi}{n}},\quad (k=0,1,2,..2n-1).$$

Ecuația (29) este de o mare generalitate, căci ea cuprinde pe acelea tratate la numerile 2. și 3.

Cazuri particulare. 1°. Dacă în ecuația (24), luăm:

$$a=b_1=c_1=0,\quad a_1=1,$$

obținem:

$$(-x\pm\sqrt{x^2-b^2-c^2})^{2n}-[-(b-ci)]^{2n}=0,$$

sau:

$$(25)\qquad \left(\frac{x\mp\sqrt{x^2-b^2-c^2}}{b-ci}\right)^{2n}=1,$$

cu rădăcinele:

$$x=b\cos\frac{k\pi}{n}+c\cos\frac{k\pi}{n},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2n-1).$$

Am obținut astfel ecuația (4) și deci putem avea și toate cazurile particulare tratate acolo, la punctul 2.

2°. Dacă luăm:

$$a=a_1=0,$$

ecuația (24), devine:

$$[\sqrt{-(b-b_1x)^2-(c-c_1x)^2}]^{2n}-$$
$$[(b_1-c_1i)x-(b-ci)]^{2n}=0$$

$$\therefore\quad (-1)^n[(b_1x-b)^2-(c_1x-c)i^2]^n-$$
$$[(b_1x-b)-(c_1x-c)i]^{2n}=0$$

Simplificând prin:

$$[(b_1x-b)-(c_1x-c)i]^n,$$

găsim:

$$(-1)^n[b_1x-b+(c_1x-c)i]^n-$$
$$[b_1x-b-(c_1x-c)i]^n=0.$$

Inmulțind cu i^n, avem:

$$(26)\quad [(c_1-b_1i)x-(c-bi)]^n-$$
$$[(c_1+b_1i)x-(c+bi)]^n=0,$$

cu rădăcinele:

$$x=\frac{b\cos\frac{k\pi}{n}+c\sin\frac{k\pi}{n}}{b_1\cos\frac{k\pi}{n}+c_1\sin\frac{k\pi}{n}},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1).$$

Am obținut astfel ecuația (17), și deci putem deduce și toate cazurile particulare tratate acolo, la punctul 4.

3°. Pentru:

$$b=c=a_1=c_1=0,\quad a=b_1=1,$$

ecuația (24), devine:

$$(27)\qquad (1\pm\sqrt{1-x^2})^{2n}-x^{2n}=0,$$

cu rădăcinele:

$$x=\sec\frac{k\pi}{n}.\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2n-1).$$

4°. Pentru:

$$b=c=a_1=b_1=0,\quad a=c_1=1,$$

ecuația (24) devine:

$$(28)\qquad (1\pm\sqrt{1-x^2})^{2n}-(-1)^n x^{2n}=0,$$

cu rădăcinele:

$$x=\operatorname{cosec}\frac{k\pi}{n},\quad (k=1,\ 2,\ldots 2n-1).$$

6. *Să se formeze ecuația algebrică, cu rădăcinele:*

$$(29)\quad x=a\sin^2\frac{k\pi}{n}+b\sin\frac{2k\pi}{n},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1)$$

In virtutea formulelor lui *Euler*, în care notăm:

$$e^{\frac{ik\pi}{n}}=t,$$

relația (29), se poate scri:

$$x=\frac{a}{-4}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+\frac{b}{2i}\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

De aci deducem:

$$(a\,i-2\,b)\,t^4-2\,(a-2\,x)\,i\,t^2+(a\,i+2\,b)=0,$$

sau înmulțind cu $-i$, avem:

$$(a+2\,b\,i)\,t^4-2\,(a-2\,x)\,t^2+(a-2\,b\,i)=0$$

$$\therefore\quad t^2=\frac{a-2\,x\pm\sqrt{(a-2\,x)^2-a^2-4\,b^2}}{a+2\,b\,i}$$

Ridicând ambii membri la puterea n, după ce simplificăm sub radical, obținem:

$$(30)\qquad \left(\frac{a-2\,x\pm 2\sqrt{x^2-a\,x-b^2}}{a+2\,b\,i}\right)^n=1.$$

Aceasta este ecuația cerută, cu rădăcinele date de relația (29).

Observare. Dacă în ecuația (30), luăm:

$$b=\frac{a}{2\,i},$$

atunci ecuația (29) devine:

$$\left(\frac{a-2\,x+\sqrt{4\,x^2-4\,a\,x+a^2}}{2\,a}\right)^n=1,$$

sau:

$$(31)\qquad (a-2\,x)^n=a^n,$$

cu rădăcinele:

$$(32)\quad x=a\sin^2\frac{k\pi}{n}+\frac{a}{2i}\sin\frac{2\,k\pi}{n}=\frac{a}{i}\,e^{\frac{ik\pi}{n}}\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$(k=1,\ 2,\ldots n-1).$$

Particularizând și pe a, luând, $a=i$, obținem ecuația:

$$(33)\qquad (1+2\,i\,x)^n=1,$$

cu rădăcinele:

$$(34)\qquad x=e^{\frac{ki\pi}{n}}\sin\frac{k\pi}{n},\quad (k=1,\ 2,\ldots n-1).$$

7. Am evidențiat astfel, prin numeroasele exemple tratate, cum putem construi printr'o metodă simplă, o clasă importantă de ecuațiuni algebrice, cu rădăcini trigonometrice, pornind dela expresiunea trigonometrică ce vrem să aibă rădăcinele. Reciproc, dându-se una din ecuațiunile trigonometrice formate mai sus, trebue să știm conduce astfel calculele ca să putem afla rădăcinele lor trigonometrice corespunzătoare. Folosind apoi relațiile între rădăcini și coeficienții, acestor ecuații, putem obține o clasă interesantă de identități trigonometrice.

Chestiunile tratate în acest articol, și altele analoage, precum și consecințele lor, cred că ar putea forma un capitol important din *Teoria ecuațiilor*, de aceia voi mai reveni.

NOTE MATEMATICE

20. *O generalizare.* Cu privire la problema 675, publicată în R. M. T,, an. VII, No. 9, pag. 154, îmi propun să dau o altă soluție decât cea din R. M. T., an. VIII, No. 2, pag. 28, unde s'a rezolvat problema, s'o complectez și s'o generalizez.

Imi propun, adică, să stabilesc inegalitatea:

$$\frac{(a+c)^n[m^2b^2+(a+c)^{2n}]}{a^n b\,c^n} \geqq 2^{2n+1}\,m,$$

știind că a, b, c, m, n sunt numere reale și pozitive.

Spre acest scop, observ că inegalitatea se mai poate scrie:

$$\frac{(a+c)^n[m^2b^2+(a+c)^{2n}]-2^{2n+1}\,m\,a^n b\,c^n}{a^n b\,c^n} \geqq 0.$$

Numărătorul se poate scrie:

$$N=(a+c)^4 m^2 b^2 - 2^{2n+1}\,m\,a^n c^n b + (a+c)^{3n}.$$

Egalat cu zero, observ că e o ecuație de gradul II în b, care dă:

$$b=\frac{2^{2n+1}\,m\,a^n c^n \pm \sqrt{2^{4n+2}\,m^2a^{2n}c^{2n}-4m^2(a+c)^{4n}}}{2\,m^2(a+c)^n}$$

$$=\frac{2^{2n}\,a^n\,c^n \pm \sqrt{2^{4n}\,a^{2n}\,c^{2n}-(a+c)^{4n}}}{m\,(a+c)^n}.$$

Dar, cunosc inegalitatea:

$$a+c \geqq 2\sqrt{a\,c},$$

care are loc pentru orice numere reale și pozitive.

Ridicând ambii membrii la puterea $4n$ găsesc:

$$(a+c)^{4n} \geqq 2^{4n}\,a^{2n}\,c^{2n}$$

$$\therefore\quad 2^{4n}\,a^{2n}\,c^{2n}-(a+c)^{4n} \leqq 0.$$

Realizantul fiind negativ, trinomul N e de același semn cu coeficientul primului termen, orice valoare am da lui b. Acest coeficient fiind, după ipoteză, pozitiv, întreg trinomul e pozitiv.

Numitorul $a^n b\,c^n$ e și el pozitiv, când a, b, c sunt numere pozitive. El e negativ când b e negativ și în acest caz avem inegalitatea contrară:

$$\frac{(a+c)^n[m^2b^2+(a+c)^{2n}]}{a^n b\,c^n} \leqq 2^{2n+1}\,m.$$

I. MURAROIU.

21. *Inegalități algebrice*

Se cunoaște următoarea proprietate:

„Media aritmetică a mai multor câtimi este mai mare sau cel puțin egală cu media lor geometrică:

1°. Pentru câtimele x_1^2; x_2^2, avem:

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{2} \geqq \sqrt{x_1^2\,x_2^2} \quad \text{sau} \quad x_1^2+x_2^2 \geqq 2\,x_1\,x_2.$$

Analog pentru câtimele x_2^2, x_3^2 și x_3^2, x_1^2, se obține respectiv:

$$x_2^2+x_3^2 \geqq 2\,x_2\,x_3 \quad \text{și} \quad x_3^2+x_1^2 \geqq 2\,x_3\,x_1.$$

Adunând inegalitățile astfel obținute, avem:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 \geqq x_1\,x_2+x_2\,x_3+x_3\,x_1$$

(Culegere de Probleme, algebră).

Dacă vom considera câtimile:

$$x_1^2,\ x_2^2;\ x_2^2,\ x_3^2;\ x_3^2,\ x_4^2;\ \ldots;\ x_n^2,\ x_1^2,$$

vom obține. procedând ca mai sus, inegalitatea:

$$(a)\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2 \geqq x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1$$

care constitue o generalizare a inegalității obținută mai sus.

2°. După proprietatea enunțată, avem:

$$x_2^3+x_3^3+x_4^3 \geqq 3\,x_2\,x_3\,x_4$$

$$x_1^3+x_3^3+x_4^3 \geqq 3\,x_1\,x_3\,x_4$$

$$x_1^3+x_2^3+x_4^3 \geqq 3\,x_1\,x_2\,x_4$$

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3 \geqq 3\,x_1\,x_2\,x_3.$$

Sau, adunând:

$$(1)\quad x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 \geqq x_1\,x_2\,x_3+x_1\,x_2\,x_4+x_1\,x_3\,x_4+x_2\,x_3\,x_4.$$

In general, dacă însemnăm:

$$S_{n+1}^n = x_1^n+x_2^n+x_3^n+\ldots+x_{n+1}^n$$

avem:

$$S_{n+1}^n - x_1^n \geqq n\,x_2\,x_3\,x_4\ldots x_{n+1}$$

$$S_{n+1}^n - x_2^n \geqq n\,x_1\,x_3\,x_4\ldots x_{n+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{n+1}^n - x_{n+1}^n \geqq n\,x_1\,x_2\,x_3\ldots x_n.$$

Adunând obținem inegalitatea:

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{n+1}^n \geqq x_2 x_3 \ldots x_{n+1} + x_1 x_3 \ldots x_{n+1} + \ldots + x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$$

în care dacă facem $n = 3$, obţinem inegalitatea (1).

Putem avea de asemenea:

$$S_{n+2}^n = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{n+2}^n$$

şi:

$$S_{n+2}^n - x_1^n - x_2^n \geqq n\, x_3 x_4 \ldots x_{n+2}$$

$$S_{n+2}^n - x_2^n - x_3^n \geqq n\, x_2 x_4 \ldots x_{n+2}$$

$$S_{n+2}^n - x_3^n - x_4^n \geqq n\, x_1 x_2 \ldots x_{n+2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{n+1}^n - x_{n+2}^n - x_1^n \geqq n\, x_2 x_3 \ldots x_{n+1}.$$

Cari adunate ne dau:

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + \ldots + x_{n+2}^n \geqq x_3 x_4 \ldots x_{n+2} + x_1 x_4 \ldots x_{n+2} + \ldots + x_2 x_3 \ldots x_{n+1}.$$

3°. Inegalitatea (*a*) înmulţită cu n, se mai poate scrie:

$$(A - 2x_1)^2 + (A - 2x_2)^2 + \ldots + (A - 2x_n)^2 \geqq x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_n x_1$$

unde am notat:

$$A = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n.$$

Dacă facem $n = 3$, avem:

$$(x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_3 - x_2)^2 + (x_2 + x_3 - x_1)^2 \geqq x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1.$$

(Culegere de Probleme, algebră).

4°. In virtutea proprietăţii enunţate la începutul acestei note, putem scrie:

$$(n+1)\, x_1^{m+n} + x_2^{m+n} + \ldots + x_m^{m+n} \geqq (m+n)\, x_1^{n+1} x_2 x_3 \ldots x_m$$

$$(n+1)\, x_2^{m+n} + x_1^{m+n} + \ldots + x_m^{m+n} \geqq (m+n)\, x_2^{n+1} x_1 x_3 \ldots x_m$$

$$(n+1)\, x_3^{m+n} + x_1^{m+n} + \ldots + x_m^{m+n} \geqq (m+n)\, x_3^{n+1} x_1 x_2 \ldots x_m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n+1)\, x_m^{m+n} + x_1^{m+n} + \ldots + x_{m-1}^{m+n} \geqq (m+n)\, x_m^{n+1} x_1 x_2 \ldots x^{m-1}.$$

Adunând, obţinem inegalitatea:

$$x_1^{m+n} + x_2^{m+n} + \ldots + x_m^{m+n} \geqq x_1 x_2 \ldots x_m (x_1^n + x_2^n + \ldots + x_m^n)$$

în care dacă facem $m = 3$, $n = 1$, avem:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \geqq x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3).$$

(Culegere de Probleme, algebră I. T. I. C.)

Analog se poate stabili inegalitatea:

$$x_1^{m+2n} + x_2^{m+2n} + \ldots + x_m^{m+2n} \geqq x_1 x_2 \ldots x_m (x_1^n x_2^n + x_2^n x_3^n + \ldots + x_m^n x_1^n).$$

Şi multe alte asemănătoare, deduse pe aceiaşi cale.

NICOLAE O. ZAHARIA

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examenul de admitere în anul I

Lucrări scrise

22 Octombrie 1928

Algebră

1°. Să se rezole sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 11 \\ (x+y)(y+z)(z+x) = 60. \end{cases}$$

2°. Să se determine *a*, astfel ca derivata funcţiunei:

$$y = \frac{x-a}{2x^2} + \log \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}},$$

să se anuleze pentru $x = -1$.

In acest caz, să se afle rădăcinele derivatei, (log. înseamnă logaritmi neperian).

3°. Să se determine *a* şi *b*, astfel ca ecuaţia:

$$x^4 - 10x^3 + ax^2 + bx + 36 = 0,$$

să aibă două rădăcini duble şi să se afle aceste rădăcini.

Trigonometrie

22 Octombrie 1928

1°. Să se determine arcele care satisfac relaţia:

$$(1 - \sin x)\sqrt{3} = \cos x.$$

2°. Un turn înalt de 30 m. se vede din punctul A sub un unghiu α. Apropiindu-ne cu 50 m, de turn se vede sub un unghiu dublu.

Care e distanța dela A până la piciorul turnului?

(Turnul este vertical, iar terenul între turn și punctul A, orizontal).

3. Două roți de raze $R = 1.50$ m. și $r = 0.50$ m. se găsesc în același plan. Distanța între centrele lor este $d = 4.00$ m.

Să se determine cu două zecimale exacte lungimea unei curele încrucișate care ar fi întinsă pe aceste roți.

(Timpul acordat 2 — 6).

Geometrie

23 Octombrie 1928

Chestiunea I

Se dă sfertul de cerc A O B. Fie M un punct pe arcul A B. Tangenta în M la acest arc întâlnește raza O A în C și raza O B în D. Să se demonstreze că M A este paralelă cu bisectoarea unghiului D, iar M B este paralelă cu bisectoarea unghiului C din triunghiul C O D.

Chestiunea II

In pentagonul regulat A B C D E se unește vârful A cu mijlocul M al laturei opuse C D. Fie N intersecția lui A M cu B E. Să se demonstreze că avem următoarele relațiuni:

$$\overline{MN}^2 = \overline{BN}^2 + \overline{CM}^2 = AM \times AN.$$

Chestiunea III

Fie A, B, C trei puncte în linie dreaptă și M un punct variabil în plan. Fie O_1 centrul cercului circumscris triunghiului A B M și O_2 centrul cercului circumscris triunghiului C B M. Se știe că dacă M este variabil, O_1 se mișcă pe o dreaptă D_1 perpendiculară pe mijlocul lui A B iar O_2 se mișcă pe o dreaptă D_2 perpendiculară pe mijlocul lui B C.

Se cere:

1°. Să se arate că pentruca figura $M O_1 B O_2$, să fie un paralelogram trebue ca punctul M să se miște pe o dreaptă D_3 paralelă cu D_1 și D_2.

2°. Să se arate că suprafața paralelogramului $M O_1 B O_2$ este egală cu produsul $2 O_1 O \cdot O B$, în care O este mijlocul lui $O_1 O_2$. Se va observa în prealabil că acest paralelogram este totdeauna romb.

3°. Dacă se înseamnă cu a lungimea B C, cu x distanța dela O la A C și dacă:

$$AB = 2 \times BC,$$

atunci suprafața S a paralelogramului $M O_1 B O_2$ este dată de egalitatea:

$$S = \frac{3a}{4}\left(x + \frac{a^2}{16x}\right).$$

4°. Să se arate că minimul lui S are loc când triunghiul dreptunghic OKB este isoscel, K fiind proecția lui O pe A B.

(Durata 4 ore).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIV, No. 2, Octombrie 1928. Sur l'orthopôle, par *V. Thébault*. Asupra perpendicularei dusă dintr'un punct exterior pe o dreaptă, de *M. Nicolau*. Cereurile extern-bitangente, de *Dan Barbilian*.

2. *Revista universitară matematică*, redactată de *Rodolphe Racliș*, pentru candidații la licență și elevii școalelor technice *superioare* 1(1), 1929. Dorim întregul succes acestei reviste serioase și îngrijite, care împlinește o lacună în învățământul nostru superior.

Cuprinde. Polinoame remarcabile și formule sumatorii, de *Rodolphe Racliș*. Calculul unor determinanți, de *Virgil Coșniță*.. Asupra ecuației de gradul al 6-lea, de *Virgil Coșniță*. Asupra unor determinanți, de *Nicolae Botea*. Probleme propuse 1 — 6.

Chestiuni de examen, enunțuri și soluțiuni, precum și numele candidaților admiși, date la: *Facultatea de Științe din București, Facultatea de Științe din Iași* și *Școala Politechnică din București*.

Pentru informații, a se adresa d-lui *Rodolphe Racliș*, 70, strada Porumbaru, București, 2.

2. *Bulletin Mathématique, de la Société Roumaine des Sciences* 31(1). Cuprinde: Lista membrilor. La vecteur accélération, par *D. Pompeiu*. Sur la représentation conforme et les équations fonctionnelles, par *Rodolphe Racliș*. Asupra desvoltărilor în serii după funcțiunile fundamentale *Fredholme* ale unui sâmbure simetrisabil generalizat, de *Ovidiu Țino*. Reprezentarea canonică a adunării iperelliptice, de *Dan Barbelian*.

Procesele-verbale ale Societății Române de Stiințe, secția matematică, din 23 Ianuarie, 6 și 20 Februarie, 2 și 19 Martie, 2, 20 și 28 Aprilie, 7, 17 și 28 Mai și 5 Iunie 1928.

PROBLEME REZOLVATE

717. — *Dacă* $\frac{a}{b+a}$ *este baza logaritmilor, să se determine* a, *astfel ca să avem:*

$$b(\log a - a) - a(\log b + b) = 2ab \log a,$$

GHEORGHIU TH. GH.

Relația din enunț se poate scrie:

$$b \log a - ab - a \log b - ab = 2ab \log a,$$

sau:

$$\log a^b - \log b^a - \log a^{2ab} = 2ab$$

$$(1) \qquad \therefore \log \frac{a^b}{b^a a^{2ab}} = 2ab.$$

Conform enunțului, avem însă:

$$\lg \frac{a}{b+a} = 1,$$

deci:

$$(2) \qquad 2\,a\,b \log \frac{a}{b+a} = 2\,a\,b.$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă:

$$\log \frac{a^b}{b^a\, a^{2ab}} = 2\,a\,b \log \frac{a}{b+a} = \log \frac{a^{2ab}}{(b+a)^{2ab}}$$

Logaritmii fiind egali, rezultă:

$$\frac{a^b}{b^a\, a^{2ab}} = \frac{a^{2ab}}{(b+a)^{2ab}}$$

Extrăgând rădăcina $2\,a\,b$ şi luând numai valoarea reală, a, b fiind consideraţi reali, avem:

$$\frac{a}{b+a} = \frac{a^{\frac{1}{2a}}}{a\, b^{\frac{1}{2b}}}.$$

Rezolvând această relaţie în raport cu a, găsim:

$$a = \frac{b\, a^{\frac{1}{2a}-1}}{b^{\frac{1}{2b}} - a^{\frac{1}{2a}-1}} = \frac{b}{a^{1-\frac{1}{2a}}\, b^{\frac{1}{2b}} - 1}.$$

Aceasta este valoarea căutată pentru a.

Soluţii date de d-nii: *Arganini Victor* (lic. Piieşti), *Climescu C. Alexandru* (Semin. Pedag.. Iaşi), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galaţi), *Ettinger Alexandru* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Hohoi Vasile* (lic. Braşov), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Licev Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Lupu Nicolae* (lic, Galaţi) *Micula O.* (Timişoara), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Negoescu I* (Sublocot. de Artilerie), *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila), *Panţu Z. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Petrică I. Ioan* (Cluj), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) şi *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu),

Au mai trimes soluţii d-nii: *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Dumitrescu Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit, Iaşi) şi *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi).

720. — A, B, C *fiind unghiurile unui triunghiu oarecare, să se arate că avem*:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^2\frac{A}{2} & \cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \\ 1 & \sin^2\frac{B}{2} & \cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2} \\ 1 & \sin^2\frac{C}{2} & \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^2\frac{A}{2} & \cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \\ 1 & \cos^2\frac{B}{2} & \cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2} \\ 1 & \cos^2\frac{C}{2} & \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

COSNITA CEZAR

Fie Δ primul determinant şi Δ_1 cel de al 2-lea Observăm că dacă în Δ înlocuim elementele coloanei a 2-a prin diferenţa dintre elementele coloanei 1-a şi a 2-a. obţinem tocmai determinantul Δ_1, astfel că e suficient să dovedim numai, că:

$$\Delta = 0,$$

Pentru aceasta folosim formulele cunoscute:

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{r_a - r}{4R}, \quad \cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \frac{r_a}{r},$$

şi acele obţinute permutând circular pe A, B, C. (Compléments de Trigonométrie, par F. G. M., pag. 179 şi 177), şi determinantul Δ se poate scri succesiv:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{r_a - r}{4R} & \frac{r_a}{r} \\ 1 & \frac{r_b - r}{4R} & \frac{r_b}{r} \\ 1 & \frac{r_c - r}{4R} & \frac{r_c}{r} \end{vmatrix} = \frac{1}{4Rr} \begin{vmatrix} 1 & r_a - r & r_a \\ 1 & r_b - r & r_b \\ 1 & r_k - r & r_c \end{vmatrix}.$$

Inlocuind elementele coloanei a 2-a cu acelea obţinute scăzând din elementele liniei a 3-a, acelea ale liniei a 2-a, obţinem:

$$\Delta = \frac{1}{4Rr} \begin{vmatrix} 1 & r & r_a \\ 1 & r & r_b \\ 1 & r & r_c \end{vmatrix} = \frac{1}{4Rr^2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & r_a \\ 1 & 1 & r_b \\ 1 & r & r_c \end{vmatrix} = 0,$$

ca având două coloane egale.

Şi al 2-lea determinant din enunţ Δ_1, este deci nul în virtutea observării dela început.

Soluţii date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjan Petru* (Caransebeş), *Arganini Victor* (lic. Piteşti), *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Bădescu I. Amedeu* (lic. Caracal), *Băjănescu P.* (lic. Caracal), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Bucurescu Ion* (Şc. Milit. de Geniu), *Ciancilian Agop* (lic. Braşov), *Climescu C. Al.* (Semin. Pedag., Iaşi), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dimitriu*

Ât. Ioan (lic. Galați), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Gavrilescu Vasile* (lic. Brașov), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiev Nicolae* (Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Hohoi Vasile* (Brașov), *Iacob Șt. Eugen* (Sublocot. de Artilerie), *Iancu David* (lic. Național, Iași), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Licev Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Lupu Nicolae* (lic. Galați), *Micula O.* (Timișoara), *Milea O. Ene* (lic.-Sărat), *Murăroriu Ioan* (lic. Brașov), *Nichiforescu Gh. Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Panaite N. Theodor* (lic. Milit., Iași), *Panțu Z. Nicolae* (lic. Lazăr, Bucureeti), *Petrică I. Ioan* (Cluj), *Popescu O. Adrian* (lic. Milit., Craiova), *Popescu P. Eugeu, Rapaport Leon* (lic. Kogălniceanu, Iasi), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Rășcanu C-tin* (lic. Kogălniceanu, Iași), *Rivalet B. Victor* (lic. Kogălniceanu, Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Saur Ioan* (liç. Arad), *Savin C. Ioan* (lic. Milit, Iași), *Scurtu N. Nicolae* (Brașov), *Secărоiu D-tru* (lic. Brașov), *Simionescu Grigore* (lic. Milit., Craiova), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Streit Ig. Victor* (lic. Internat, Iași), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu) și *și Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

A mai trimes soluții, d-l: *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila).

729*. — *Se cere restul împărțirei expresiunei:*

$$\sum_{k=2}^{p-1} k\,(p-k)^{p-1},$$

prin numărul prim p.

EMIL STEFANESCU

Observăm că putem scri:

$$(1)\ \sum_{k=2}^{p-1} k\,(p-k)^{p-1} = \sum_{k=2}^{p-2} k\,[\text{mult. } p + (-k)^{p-1}] =$$

$$\text{mult. } p + \sum_{k=2}^{p-1} k\,(-k)^{p-1},$$

p fiind prim, $p-1$ este par, deci:

$$(-k)^{p-1} = k^{p-1}$$

și cum k este prim cu p care e prim, după teorema lui *Fermat* putem scri:

$$k^{p-1} = \text{mult. } p + 1.$$

Relația (1), atunci devine:

$$\sum_{k=2}^{p-1} k\,(p-k)^{p-1} = \text{mult. } p + \sum_{k=2}^{p-1} k =$$

$$\text{mult } p + \frac{(p+1)(p-2)}{2} = \text{mult. } p + \frac{p^2-p-2}{2}$$

$$= \text{mult } p + \frac{p(p-1)}{2} - 1.$$

Cum p este prim, $\frac{p-1}{2}$ este întreg, și atunci:

$$\sum_{k=2}^{p-1} k\,(p-k)^{p-1} = \text{mult. } p - 1 = \text{mult. } p + (p-1).$$

Restul căutat este deci, $p-1$.

Soluții date de d-nii: *Arganini Victor* (lic. Pitești), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Roman I. Ioan* (București), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași) și *Sirchis I.* (lic. Tighina).

732*. — *Se dă patratul* ABCD *de latură* a, *cu centrul* O *și fie* E, F, G, H *mijloacele laturilor lui. Se prelungește* AB, CB, EG, FH, *până în punctele* I, J, K, L, *astfel ca*:

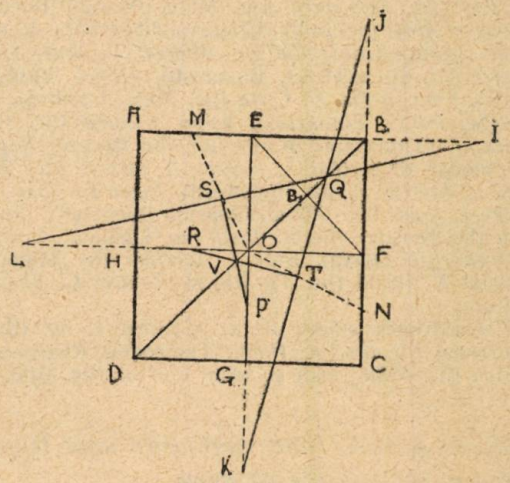
$$BI = BJ = GK = HL = \frac{a}{2}.$$

1°. *Să se arate că dreptele* IL *și* JK, *trec prin centrul de greutate al triunghiului* BEF.

2°. *Dacă* M, N, P, R *sunt mijloacele lui* AE, FC, OG, OH *iar* S *și* T *intersecțiile dreptelor* IL, OM *și* JK, ON, *să se arate că punctul de intersecție al dreptelor* SP *și* RT, *se găsește pe diagonala* DB.

3° *Insemnând cu* Q *și* V *intersecțiile dreptelor* IL, JK *și* SP, RT, *să se calculeze lungimea segmentului* QV,

V. ALACI



Soluție analitică. Luăm EG și HF ca axe.

1°. Coordonatele punctelor I, L, J, K, B sunt evident:

$$I\left(a, \frac{a}{2}\right),\ L(-a, 0),\ J\left(\frac{a}{2}, a\right),$$

$$K(0, -a),\ B\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right).$$

Dreptele IL, JK, OB au deci respectiv ecuațiile:

$$\frac{x-a}{-a-a}=\frac{y-\frac{a}{2}}{-\frac{a}{2}},\quad \frac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{a}{2}}=\frac{y-a}{-a-a},\quad y=x,$$

sau:

$$x-4y=-a,\quad 4x-y=a,\quad y=x.$$

Primele două ecuații, rezolvate, ne dau coordonatele punctului de intersecție a dreptelor IL, JK, anume:

$$x=\frac{a}{3},\quad y=\frac{a}{3},$$

ceiace dovedește că ele se întâlnesc pe dreapta O B în Q. Rămâne să arătăm că Q este centrul de greutate al triunghiului B E F. In adevăr B_1 fiind intersecția lui B O cu E F, avem:

$$B_1\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\right),$$

și atunci puntem scri:

$$\frac{QB}{QB_1}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{4}}=2,$$

deci: $$QB=2QB_1.$$

Q_1 este deci centrul de greutatea al triunghiului B E F, fiind pe mediana BB_1 la $\frac{2}{3}$ din mediană, de vârf.

2°. Observăm că punctele M, N, P, R au coordonatele:

$$M\left(-\frac{a}{4},\ \frac{a}{2}\right),\ N\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{4}\right),$$

$$P\left(0,\ -\frac{a}{4}\right),\ R\left(-\frac{a}{4},\ 0\right).$$

Dreptele I L și O M au ecuațiile:

$$x-4y=-a,\quad y=-2x,$$

deci coordonatele punctului S sunt:

$$S\left(-\frac{a}{9},\ \frac{2a}{9}\right).$$

Dreptele J K și O N, au ecuațiile:

$$4x-y=a,\quad y=-\frac{1}{2}x,$$

deci coordonatele punctului T, sunt:

$$T\left(\frac{2a}{9},\ -\frac{a}{9}\right).$$

Rezultă, că dreptele S P. R T, O B, au respectiv ecuațiile:

$$\frac{x+\frac{a}{9}}{\frac{a}{9}}=\frac{y-\frac{2a}{9}}{-\frac{a}{4}-\frac{2a}{9}},\quad \frac{x-\frac{2a}{9}}{-\frac{a}{4}-\frac{2a}{9}}=\frac{y+\frac{a}{9}}{\frac{a}{9}},\quad y=x$$

sau:

$$17x+4y=-a,\quad 4x+17y=-a,\quad y=x.$$

Primele două ecuații, rezolvate, ne dau coordonatele punctului de intersecție al dreptelor S P și R T, anume:

$$x=-\frac{a}{21},\quad y=-\frac{a}{21},$$

ceiace dovedește că ele se întâlnesc pe diagonala B D.

3°. Pentru a calcula segmentul Q V, observăm că cunoaștem coordonatele punctelor Q și V, anume:

$$Q\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right),\qquad V\left(-\frac{a}{21},\ -\frac{a}{21}\right).$$

și atunci aplicăm furmula care dă distanța între două puncte ale căror coordonate le cunoaștem, avem:

$$QV=\sqrt{\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{21}\right)^2+\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{21}\right)^2}=\sqrt{2\left(\frac{8a}{21}\right)^2},$$

$$QV=\frac{8a\sqrt{2}}{21}.$$

Soluții date de d-nii; *Cioclov Gheorghe* (Șc. Polit, Timișoara), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dobromirescu P.*, *Dumitrescu Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Oighenstein David* (lic. Bălți), *Roman I. Ioan* (București) *Sirchis I.* (lic. Tighina).

Soluția 2-a dată de d-l *Micula O.* (Șc. Polit.' Timișoara).

1°. Fie Q punctul de intersecție al dreptei I L cu diagonala B D. Din asemănarea triunghiurilor L O Q și B I Q.

$$\frac{OQ}{BQ}=\frac{OL}{BI}=\frac{\frac{a}{2}}{a}=2,$$

deci:

$$BQ=\frac{BO}{3}=\frac{2BB_1}{3},$$

ceiace dovedeşte că Q este centrul de greutate al triunghiului BEF. Analog se demonstrează că intersecţia dreptelor JK, OB este tot Q.

2°. Observăm că pentagonul ADCFE, admite ca axă de simetrie diagonala BD. Deci, centrul lui de greutate se găseşte pe BD. Descompunem acum pe ADCFE în trapezul AEFH şi dreptunghiul CDHF. In urma construcţiilor făcute, se observă uşor că S este centrul de greutate al trapezului AEFH şi P centrul de greutate al dreptunghiului CDHF. Rezultă atunci că punctul de intersecţie al dreptelor SP şi BD, este centrul de greutate al figurei ADCFE. Privim acum pentagonul ADCFE caformat din trapezul EFCG şi dreptunghiul ADGE. Deducem în acelaşi mod că intersecţia dreptelor RT şi BD este centrul de greutate a lui ADCFE. Rezultă deci, că SP şi RT se întâlnesc pe diagonala BD, în V.

3°. Centrul de greutate al patratului dat, este O. Descompunem patratul în BEF şi ADCFE cu centrele de greutate respectiv în Q şi V. Distanţele OQ şi OV sunt proporţionale cu suprafeţele, ale căror centre de greutate sunt V şi Q, deci:

$$\frac{s(ADCFE)}{s(BEF)} = \frac{OQ}{OV} = 7,$$

sau:

$$\frac{OQ}{OV+OQ} = \frac{7}{8}, \quad \text{deci:} \quad QV = \frac{8}{7}OQ.$$

Dar, am arătat că:

$$BQ = \frac{OB}{3},$$

rezultă:

$$OQ = \frac{2OB}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3},$$

şi deci:

$$QV = \frac{8a\sqrt{2}}{21}.$$

Observare. Au soluţionat pe cale geometrică, numai primele două puncte, ale problemei, d-nii: *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Gheorghiu N.*, *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Panţu Z. Ion* (Bucureşti), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Sprinceană Gheorghe* (Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi) şi *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

PROBLEME PROPUSE

767. — Dacă m şi n sunt numere prime, de o singură cifră, să se găsească numărul $N = 2^3 . 3^2 . m . n$ ştiind că, câtul dintre suma divizorilor numărului N, prin N este $\frac{13}{2}$.

ISTINIE J. BREZUICA

768. — Se cere patratul perfect de şase cifre astfel ca patratul cifrei unităţilor să fie egal cu numărul format de primele două cifre. Cifra a doua care este un patrat perfect, pusă la dreapta cifrei a cincea, formează tot un patrat perfect Din numărul format de primele două cifre scăzând 27 obţinem numărul format de cifra treia şi a patra.

BALASESCU N. C-ÉIN.

769. — Se dau segmentele a şi b. Se cere să se construiască grafic, segmentele:

$$x_1 = \frac{a^4}{b^5}(a^2+b^2), \quad x_2 = \frac{a^{10}+b^{10}}{a^4 b^5}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{a^{18}+b^{18}}}{a^4 b^4}$$

V. ALACI

770. — Se dă cercul O şi un punct fix A în planul său. Fie BC o coardă de direcţie dată a cercului O, P_1 polul lui AB şi P_2 polul lui AC, faţă de O. Să se demonstreze că dreapta P_1P_2 rămâne fixă ca direcţie şi poziţie, când coardă BC se deplasează paralel cu ea.

COL. GH. BUICLIU

771. — Să se stabilească identitatea:

$$\sqrt[4]{b^4+2ac(ac-2b^2) \pm \sqrt{[b^4+2ac(ac-2b)]^2-4a^4c^4}} = \pm\frac{2ac\sqrt[4]{2}}{\sqrt{b^2-4ac}-b}.$$

CEZAR COSNITA.

772[1]). — Dacă masele în problema celor două corpuri se schimbă păstrându-si raportul dintre ele, cum se modifică mişcarea?

V VALCOVICI

1) Punctul 1 şi 2 din paoblema 766, construesc fiecare o problemă a parte, de accia punctul 2, îl publicăm din nou sub alt număr.

INFORMAȚIUNI

In zilele de 22, 23, 24 și 25 Octombrie a avut loc examenul de admitere în Școala Politechnică din Timișoara. Comisia de examinare prezidată de d-l Prof. *V. Vâlcovici* și compusă din d-nii Profesori: *V. Alaci* pentru Algebră, *Col. Gh. Buicliu* pentru Geometrie, *I. Magheru* pentru Fizică și *I. Protopopescu* pentru Trigonometrie.

Au fost declarați admiși în anul I al școalei următorii 71 candidați în ordinea clasificației:

1.	Antoniu V,	Lic. Cluj
2.	Micula O.	„ Timișoara
3.	Paraschivescu S.	„ Craiova
4.	Jurca C. (An. prep).	„ Sighetul Marmației
5.	Dogaru R.	„ Brăila
6.	Colești A.	„ Brașov
7.	Pogăceanu S. (An. pr.)	„ Turda
8.	Scurtu N.	„ Brașov
9.	Vasiliu N.	„ R.-Sărat
10.	Cuncic A.	„ C. Negruți, Iași
11.	Gheorghiev N.	„ Bolgrad
12.	Ionescu G.	„ Caransebeș
13.	Terzici A.	Semin. Pedagogic, Iași
14.	Cioclov G.	Lic. T.-Severin
15.	Licev I. (An. prep.)	„ Bolgrad
16.	Stoenescu I,	„ Brăila
17.	Nicov A.	„ Chișinău
18.	Cocârlan P.	„ Timișoara
19.	Trufin V.	„ Dorohoi
20.	Reinheimer C.	„ Constanța
21.	Popescu C.	„ M.-Basarab București
22.	Filiti R.	„ Arad
23.	Lacea N.	„ Tg.-Jiu
24.	Brașovan G.	„ Timișoara
25,	Corpaci I.	„ Focșani
26.	Landt G. (An. prep.)	„ Rom. Catol. Odorheiu
27.	Șaur I.	„ Arad
28.	Vinițchi D.	„ Chișinău
29.	Ferenczi G. (An. pr.)	Șc. Cond. Tecnici Cluj
30.	Gobjilă L.	Semin. teologic Chișinău
31.	Pătean N.	Lic. Arad
32.	Dumitrescu N.	Lic. Timișoara
33.	Hanicska O.	Șc. Com. Super. Orșova
34.	Sion R.	Lic. Dorohoi
35.	Lungu D.	„ Brăila
36.	Țăruș V.	„ Chișinău
37.	Demianov C.	„ Ismail
38.	Găină G.	„ Tecnic Agric. Soroca
39.	Vlahoviciu A.	„ Lugoj
40.	Șchiopu I.	„ Timișoara
41.	Boconcios I. (An. pr.)	„ Carei
42.	Curelea G.	„ Brăila
43.	Brăileanu G.	„ Real 1, Cernăuți
44.	Cimpoia V.	„ Bacău
45.	Dospil E.	„ de Stat 4, Cernăuți
46.	Driga N.	„ Ismail
47.	Lupea I. (An. prep).	Șc. Sup. Arte și Meserii, București
48.	Mocuța Tr.	Lic. Arad
49.	Zebacinschi M. (An. pr.)	„ de Stat 4, Cernăuți
50.	Delinschi A.	Șc. Cond. Tecnici, Cluj
51.	Miu C.	Lic. Lugoj
52.	Mihăilescu F.	„ Arad
53.	Pop A.	Șc. Cond. Tecnici Cluj
54.	Rădulescu C.	Șc. Sup. de Comerț Brăila
55.	Sidașenco V.	Lic. Ismail
56.	Rughinov G. (An. pr.)	„ Real Tighina
57.	Zdetovețchi N. (An. pr.)	„ Șt.-cel-Mare, Tighina
58.	Dragomirescu G.	„ Focșani
59.	Ionescu V.	„ Oradea-Mare
60.	Nicolescu C.	„ Brașov
61.	Reinfeld E. (An. pr.)	Șc. Cond. Tecnici, Cluj
62.	Gheorghiu M.	Lic. Tg.-Jiu
63.	Barna L.	Șc. Cond. Tecnici, Cluj
64.	Bonțideanu L.	Șc. Cond, Lucr. Pub. Cluj
65.	Michels I.	Lic. ger. de Stat Timișoara
66.	Șova I.	„ Bacău
67.	Giurgiuți D.	„ Arad
68.	Bass E.	„ ger. de Stat Timișoara
69.	Caraciuc S.	Șc. Cond. Lucr. Publice Cernăuți
70.	Cazacu V.	Lic. Chișinău
71.	Voicu I.	„ Brașov

Sucursala Timişoara

ANUL VIII. 15 DECEMBRIE 1928 NO. 10.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CEZAR COȘNIȚĂ. REZOLVAREA UNOR ECUATIUNI ALGEBRICE CU AJUTORUL IDENTITATILOR.
2. NOTE MATEMATICE, 22, 23, 24.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 683, 733, 734, 735, 736, 737, 740 742, 744.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea de a anunța că începând din luna Decembrie, 1928, face parte din comitetul Revistei Matematice și d-l **Rod Nicolae Raclis,** conferențiar la universitatea din București.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vorfi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-șef C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat, 100 lei.
Anul III, broșat, 100 lei.
Anul IV, broșat, 100 lei.
Anul V, broșat, 100 lei.
Anul VI, broșat, 100 lei.
Anul VII, broșat, 100 lei.

ANUL VIII — NO. 10. TIMISOARA, 15 DECEMBRIE 1928

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

REZOLVAREA UNOR ECUAȚIUNI ALGEBRICE CU AJUTORUL IDENTITAȚILOR

de CEZAR COSNITA

Metoda de a rezolva și construi ecuațiuni algebrice, pe care am aplicat-o la exemplele date mai jos, mi-a fost sugerată de câteva ecuațiuni propuse de *Longchamps* în revista sa: „Journal de mathématiques élémentaires". (A se vedea: „Recueil de problémes de Mathématiques" par *C. A. Laisant* vol- I, pag. 29).

1. Să se rezolve ecuațiunile:

$$(1)\qquad 8(x-a-b)(x-b-c)(x-c-a)+(x-2a)(x-2b)(x-2c)=0$$

$$(2)\qquad (2x-a+b)(2x-b+c)(2x-c+a)+(x+a-b)(x+b-c)(x+c-a)=0$$

$$(3)\qquad (2x-a-b)(2x-b-c)(2x-c-a)+(x-a)(x-b)(x-c)=0,$$

și să se găsească „cheia" care permite de a construi în număr nelimitat de ecuațiuni de acest gen.

Considerăm identitatea:

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha).$$

Dacă în această identitate luăm succesiv:

$$\alpha=x-2a;\ \beta=x-2b;\ \gamma=x-2c;$$

$$\alpha=x+b-c;\ \beta=x+c-a;\ \gamma=x+a-b;$$

$$\alpha=x-a;\ \beta=x-b;\ \gamma=x-c,$$

observăm că primul membru al identității devine tocmai membrul întâi al fiecăreia din cele trei ecuațiuni de mai sus. Deci ecuațiunile propuse sunt echivalente cu următoarele trei:

$$(3x-2a-2b-2c)\Sigma(x-2a)(x-2b)=0$$

$$3x\,\Sigma(x+b-c)(x+c-a)=0$$

$$(3x-a-b-c)\Sigma(x-a)(x-b)=0.$$

Se vede acum lesne că rădăcinile ecuațiilor propuse sunt date de ecuațiile:

$$3x-2(a+b+c)=0;\ \Sigma(x-2a)(x-2b)=0;$$

$$3x=0:\ \Sigma(x+b-c)(x+c-a)=0:$$

$$3x-(a+b+c)=0;\ \Sigma(x-a)(x-b)=0.$$

Rezolvând găsim:

$$\begin{cases} x_1=\frac{2}{3}(a+b+c) \\ x_{2,3}=\frac{2(a+b+c)\pm 2\sqrt{\Sigma a(a-b)}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1=0 \\ x'_{2,3}=\frac{\pm\sqrt{\Sigma a(a-b)}}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''_1=\frac{a+b+c}{3} \\ x''_{2,3}=\frac{a+b+c\pm\sqrt{\Sigma a(a-b)}}{3} \end{cases}$$

2. Să se rezolve ecuațiunile:

$$(4)\qquad \frac{x-a+b}{x+a+b}+\frac{x-b+c}{3x+b+c}-\frac{2x+c-a}{2x+c+a}=0$$

$$(5)\qquad \frac{x-2a-b+3c}{3x+a-2b}+\frac{x-2b-c+3a}{x+b-2c}+\frac{-2x-2c-a+3b}{2x+c-2a}=0,$$

și să se găsească „cheia" care permite de a construi ecuațiuni de acest gen, în număr nelimitat.

Inmulțim ecuațiunea (4) cu (-1) apoi aducem ambele ecuațiuni la forma întreagă și avem:

$$(3x+b+c)(2x+c+a)(-x+a-b)+$$
$$(2x+c+a)(x+a+b)(-x+b-c)+$$
$$(3x+b+c)(x+a+b)(2x+c-a)=0$$

$$(x+b-2c)(2x+c-2a)(x-2a-b+3c)+$$
$$(2x+c-2a)(3x+a-2b)(x-2b-c+3a)+$$
$$(3x+a-2b)(x+b-2c)(-2x-2c-a+3b)=0.$$

Considerăm acum identitatea:

$$\alpha\beta(\beta-\alpha)+\beta\gamma(\gamma-\beta)+\gamma\alpha(\alpha-\gamma)=$$
$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha),$$

în care făcând pe rând:

$$\alpha=3x+b+c;\ \beta=2x+c+a;\ \gamma=x+a+b;$$
$$\alpha=x+b-2c;\ \beta=2x+c-2a;\ \gamma=3x+a-2b,$$

membrul I al identității citate devine succesiv tocmai membrul I al fiecăreia din cele două ecuații. Deci ecuațiile (4), (5) se pot scrie:

$$(x+b-a)(x+c-b)(-2x+a-c)=0$$
$$(-x-3c+2a+b)(-x-3a+2b+c)\times$$
$$(2x-3b+2c+a)=0,$$

de unde deducem:

$$\begin{cases} x_1=a-b \\ x_2=b-c \\ x_3=-\dfrac{c-a}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'=2a+b-3c \\ x_2'=2b+c-3a \\ x_3'=-\dfrac{2c+a-3b}{2}. \end{cases}$$

3. Să se rezolve ecuațiunile:

(6) $$\frac{2x-a+2b+c}{x+2a-b}+\frac{2x-b+2c+a}{x+2b-c}+$$
$$\frac{2x-c+2a+b}{x+2c-a}+2=0$$

(7) $$\frac{2x+2a+b+c}{x+b+c}+\frac{2x+2b+c+a}{x+c+a}+$$
$$\frac{2x+2c+a+b}{x+a+b}+2=0$$

(8) $$\frac{x+a+4b}{x+5c+3a-3b}+\frac{x+b+4c}{x+5a+3b-3c}+$$
$$\frac{x+c+4a}{x+5b+3c-3a}+1=0,$$

și să se afle „cheia" care înlesnește găsirea ecuațiilor de acest gen.

Aducem ecuațiile la forma întreagă, dupăce am înmulțit ecuația (8) cu 2 și avem:

$$\Sigma(x+2b-c)(x+2c-a)(2x-a+2b+c)+$$
$$2(x+2a-b)(x+2b-c)(x+2c-a)=0$$
$$\Sigma(x+a+b)(x+c+a)(2x+2a+b+c)+$$
$$2(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b)=0$$
$$\Sigma(x+5a+3b-3c)(x+5b+3c-3a)(2x+2a+8b)$$
$$+2\,\Pi(x+5a+3b-3c)=0.$$

Dacă în identitatea:

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)+2\alpha\beta\gamma=$$
$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

facem succesiv:

$$\alpha=x+2b-c; \qquad \beta=x+2c-a;$$
$$\alpha=x+b+c; \qquad \beta=x+c+a;$$
$$\alpha=x+5a+3b-3c; \qquad \beta=x+5b+3c-3a;$$
$$\gamma=x+2a-b;$$
$$\gamma=x+a+b;$$
$$\gamma=x+5c+3a-3b,$$

obținem membrul I al fiecăreia din ecuațiile de mai sus; deci ele sunt echivalente cu următoarele:

$$(2x-a+2b+c)(2x-b+2c+a)(2x-c+2a+b)=0$$
$$(2x+2a+b+c)(2x+2b+c+a)(2x+2c+a+b)=0$$
$$x+a+4b)(x+b+4c)(x+c+4a)=0.$$

Rezultă deci următoarele soluțiuni:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{a-2b-c}{2} \\ x_2=\dfrac{b-2c-a}{2} \\ x_3=\dfrac{c-2a-b}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'=-\dfrac{a+b+2c}{2} \\ x_2'=-\dfrac{b+c+2a}{2} \\ x_3'=-\dfrac{c+a+2b}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1''=-\dfrac{a+4b}{2} \\ x_2''=-\dfrac{b+4c}{2} \\ x_3''=-\dfrac{c+4a}{2} \end{cases}$$

4. Să se rezolve ecuațiunile:

$$(9)\quad \frac{4x+3a+3b+2c}{x+a+b}+\frac{4x+3b+3c+2a}{x+b+c}+\frac{4x+3c+3a+2b}{x+c+a}=4.$$

$$(10)\quad \frac{4x+a-b}{x+a-b}+\frac{4x+b-c}{x+b-c}+\frac{4x+c-a}{x+c-a}=4$$

și să se afle „cheia" care ajută la construirea ecuațiilor de acest gen.

Aducem ecuațiile la forma întreagă și avem:

$$\Sigma(x+b+c)(x+c+a)(4x+3a+3b+2c)-4\,\Pi(x+b+c)=0$$

$$\Sigma(x+b-c)(x+c-a)(4x+a-b)-4\,\Pi(x+b-c)=0.$$

Facem:

$$\alpha=x+b+c;\ \beta=x+c+a;\ \gamma=x+a+b,$$

și apoi:

$$\alpha=x+b-c;\ \beta=x+c-a;\ \gamma=x+a-b,$$

în identitatea:

$$\Sigma\alpha\beta(\alpha+\beta+2\gamma)-4\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

și în virtutea acestei substituții ecuațiile devin:

$$(2x+2a+b+c)(2x+2b+c+a)\times(2x+2c+a+b)=0$$

$$(2x-a+b)(2x-b+c)(2x-c+a)=0,$$

de unde deducem:

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{a+b+2c}{2} \\ x_2=-\dfrac{b+c+2a}{2} \\ x_3=-\dfrac{c+a+2b}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'=\dfrac{a-b}{2} \\ x_2'=\dfrac{b-c}{2} \\ x_3'=\dfrac{c-a}{2} \end{cases}$$

Observarea I. Dacă în membrii II ai ecuațiilor precedente ar fi fost 3 în loc de 4, am fi obținut două ecuații ce se puteau rezolva cu ajutorul identității:

$$\Sigma\alpha\beta(\alpha+\beta+2\gamma)-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha).$$

5. Să se rezolve ecuațiile:

$$(11)\quad \frac{x+2a}{x+b+c}+\frac{x+2b}{x+c+a}+\frac{x+2c}{x+a+b}+5=0$$

$$(12)\quad \frac{x-2a+2b}{x+a-b}+\frac{x-2b+2c}{x+b-c}+\frac{x-2c+2a}{x+c-a}+5=0,$$

și să se afle „cheia" care ajută la aflarea ecuațiilor de acest gen.

Aducem ecuațiile la forma întreagă și avem:

$$\Sigma(x+b-c)(x+c-a)(x-2a+2b)+5\,\Pi(x+b-c)=0$$

$$\Sigma(x+b+c)(x+c+a)(x+2c)+5\,\Pi(x+b+c)=0.$$

Ținând seamă de identitatea:

$$\Sigma\alpha\beta(\alpha+\beta-\gamma)+5\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha),$$

în care punem:

$$\alpha=x+b+c;\ \beta=x+c+a;\ \gamma=x+a+b$$

și apoi:

$$\alpha=x+b-c;\ \beta=x+c-a;\ \gamma=x+a-b$$

ecuațiile devin:

$$(2x+2a+b+c)(2x+2b+c+a)\times(2x+2c+a+b)=0$$

$$(2x+b-a)(2x+c-b)(2x+a-c)=0,$$

de unde:

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{2a+b+c}{2} \\ x_2=-\dfrac{2b+c+a}{2} \\ x_3=-\dfrac{2c+a+b}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'=\dfrac{a-b}{2} \\ x_2'=\dfrac{b-c}{2} \\ x_3'=\dfrac{c-a}{2} \end{cases}$$

Observarea II. Din ecuațiile (6), (7), (8) putem obține alte 3 ecuații, dacă, după ce am înmulțit ecuația (8) cu 2, adunăm câte o unitate în membrii I ai lor. In acest caz ecuațiile se rezolvă folosind identitatea:

$$\Sigma\alpha\beta(\alpha+\beta)+3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\Sigma\alpha\beta$$

De asemenea dacă în membrii I ai ecuațiilor (11) și (12) adunăm câte o unitate obținem două ecuații ce se pot rezolvi cu ajutorul identității:

$$\Sigma\,\alpha\beta(\alpha+\beta-\gamma)+6\,\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\Sigma\,\alpha\beta.$$

* * *

Exemplele pe care le-am dat sunt suficiente, cred, pentru a evidenția cum putem rezolva sau construi anumite ecuații algebrice, oricâte voim, ecuații. cari ar fi, poate prea grele de rezolvat făcând toate calculele.

Ecuațiile pe care le-am arătat sunt numai de gradul al treilea, dar putem construi și ecuații de grade superioare gradului 3, luând alte valori pentru α, β, γ din indentitățile citate. Putem de asemenea construi ecuații de gradul al doilea având rădacini comensurabile, de exemplu cu ajutorul identității;

$$\Sigma\,\alpha\beta(\alpha+\beta)+2\,\alpha\beta\gamma=\Pi(\alpha+\beta),\ \text{etc.}$$

NOTE MATEMATICE

22. In cadrul „Institutului Matematic", dela Facultatea de Științe din Cluj, d-l Prof. *Pompeiu* s'a ocupat într'o prelegere cu chestiunea a cărui titlu va face obiectul rândurilor de față.

Deși e mai mult o chestiune de aspect sintetic, decât matematic pur, nu cred că va putea fi fără interes pentru cetitorii revistei, mai ales în studiul actual al științei când multe discipline științifice tind să-și însușească din matematică, metoda ei de riguroasă precisiune. Pentru o mai deplină înțelegere a chestiunii nu vom face incursiuni în matematicele superioare care abundă în astfel de exemple, ci vom rămâne pe cât posibil în domeniul matematicelor elementare.

La baza acestei „teoreme a închiderii" stă câștigarea unui element limită, fie el de natură aritmetică, geometrică, sau algebrică. Știm că oricărei mărimi, după caz, îi corespunde un număr întreg, fracționar, rațional sau incomensurabil. Dar aceste numere nu umplu golurile lăsate de numerile care corespund mărimilor, ci pentru aceasta s'a făcut apel la numerile imaginare — mărginindu-ne a le pomeni doar pe acestea pentru a rămâne în cadrul matematicilor elementare — fără a merge mai departe și să adăugăm numerile „ideale".

Să cosiderăm în plan un sistem de arce rectangulare și fie $z=\alpha+\beta i$ un punct al planului. Din origina arcelor ca centru și cu o rază $r=Oz$ descriem un cerc: avem evident $r=|z|$. Inegalitatea $r<|z|$ reprezintă în mod destul de vizibil puncte din interiorul cercului O, fără însă a cuprinde și pe cele de pe cerc; deci inegalitatea considerată nu poate „închide" punctele din plan mărginite de cercul O.

Să considerăm însă inegalitatea $r\leqq|z|$; avem cuprinse în această inegalitate nu numai puncte din interiorul cercului O ci și puncte „limită" de pe cerc, conchidem deci că inegalitatea considerată reprezintă o „închidere". Un element geometric, extrem de simplu și la îndemâna oricui — linia dreaptă — reprezintă în multe chestiuni — unele chiar destul de delicate, unde o putem câștiga ca un element limită — ceiace am numit noi „închidere".

Intr'adevăr fie două curbe C_1 și C_2 respectiv concave și convexe, obținute cu ajutorul funcțiilor analitice. Limita acestor două curbe este o linie dreaptă D. Dreapta D o considerăm după nevoie, când convexă când concavă, și cum ea cuprinde în sine un element limită — ea fiind limita celor două curbe — reprezintă deci o „închidere".

Ne oprim aici cu aceste spicuiri și credem că am reușit să dăm cititorilor acestei reviste o imagină fidelă a chestiunii.

M. Gh. Dumitrescu-Slatina

23. *Asupra unei probleme de examen dela Școala Politechnică din Timișoara, R. M. T., No. 10, an. II, pag. 153.*

Voi generaliza această problemă și voi arăta, mai jos, că pe lângă cele două soluții publicate în revistă, se mai pot da și altele.

Fie:

$$f(x)=x^4+A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4=0,$$

ecuațiunea dată. Imi propun să găsesc condițiunile, pentruca această ecuațiune să aibă o rădăcină dublă, iar celelalte două egale și de semne contrare.

Insemnând cu α rădăcina dublă şi cu β şi $-\beta$ rădăcinele egale şi de semne contrare, avem:

$$x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 \equiv (x-\alpha)^2 (x^2 - \beta^2).$$

Desfăcând parantezele din membrul al doilea şi identificând obţinem:

$$-2\alpha = A_1,\ \alpha^2 - \beta^2 = A_2,\ 2\alpha\beta^2 = A_3,\ -\alpha^2\beta^2 = A_4.$$

Scoţând valorile lui α şi β din egalitatea primă şi penultimă şi introducându-le în celelalte două, găsim condiţiunile:

$$(1) \qquad A_1^3 + 4A_3 = 4A_1A_2,\quad A_1A_3 = 4A_4$$

Pentru:

$$A_1 = -a,\quad A_2 = 0,\quad A_3 = 4a,\quad A_4 = -16,$$

suntem în cazul problemei propuse la examen.

Prima condiţiune din (1) ne dă:

$$a = \pm 4,$$

iar cea de a doua este verificată.

Altă soluţie. Ecuaţiunea:

$$(2) \qquad f(x) = x^4 - ax^3 + 4ax - 16 = 0,$$

admiţând o rădăcină dublă, α va trebui să se anuleze pentru $x = \alpha$, odată cu derivata sa:

$$(3) \qquad f'(x) = 4x^3 - 3ax^2 + 4a.$$

Făcând această substituţiune în (2) şi (3) şi scoţând valoarea lui a în funcţie de α, căpătăm:

$$(4) \quad a = \frac{16-\alpha^4}{\alpha(4-\alpha^2)} = \frac{4+\alpha^2}{\alpha} \quad \text{şi} \quad a = \frac{4\alpha^3}{3\alpha^2-4}$$

$$\therefore \frac{4+\alpha^2}{\alpha} = \frac{4\alpha^3}{3\alpha^2-4}$$

$$\therefore \alpha^4 - 8\alpha^2 + 16 = (\alpha^2-4)^2 = 0$$

$$\therefore \alpha = \pm 4.$$

Inlocuind valoarea lui α în una din egalităţile din (4) obţinem:

$$a = \pm 4.$$

Introducând valoarea lui a în (2), se observă uşor că această ecuaţiune are pe lângă o rădăcină dublă, două rădăcini egale şi de semn contrar.

O altă soluţie se poate da făcând ecuaţia (2) omogenă şi ţinând seamă că trinoamele:

$$f'_x(x, 1) \text{ şi } f'_y(x, 1),$$

vor trebui să aibă un factor comun.

STOENESCU AL. IOAN
lic. Cantemir, Bucureşti

24. Această problemă soluţionată la pag. 26, vol. VIII, R. M. T., generalizată, devine:

Se dă un cerc de diametru AB = a. *Se duce o coardă* PQ *paralelă cu* AB. *Eie* E, F *simetricele lui* P, Q *în raport cu* AB. *Coardele* AE *şi* BF *se taie în* K; *iar* AF *şi* BE *în* M.

Să se demonstreze că:

1°. *Patrulaterul* FKEM *este inscriptibil şi să se calculeze unghiul* AMB.

$$2°.\quad BE = a\sqrt{\frac{1-\sin n^0}{2}};\quad BF = a\sqrt{\frac{1-\sin n^0}{2}}.$$

1°. (*a*) Patrulaterul FKEM este inscriptibil, căci unghiurile opuse la vârf din E şi F sunt suplimentare şi tot odată egale căci sunt înscrise în o jumătate de cerc:

$$(b) \qquad \sphericalangle AMB = \frac{\text{arc } EF + \text{arc } AB}{2}$$

$$\text{arc } AB = 180°.$$

Fie:

$$\text{arc } EF = \text{arc } PQ = 2\sphericalangle OFI = 2n^0$$

$$(1) \qquad \therefore \sphericalangle AMB = 90^0 + n^0$$

$$2^0\ (a')\ \overline{AF}^2 = \overline{BE}^2 = AB \cdot AI;\ AI = \frac{a}{2} + OI$$

$$OI = \frac{a}{2}\sin\sphericalangle OFI;\quad \sphericalangle OFI = n^0$$

$$OI = \frac{a}{2}\sin n^0;\quad \overline{BE}^2 = a\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sin n^0\right)$$

$$(2) \quad \overline{BE}^2 = a^2\frac{1+\sin n^0}{2} \quad \therefore BE = a\sqrt{\frac{1+\sin n^0}{2}}$$

$$(b') \quad IB = OB - OI = \frac{a}{2} - OI = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sin n^0$$

$$\overline{FB}^2 = AB \cdot IB = a\left[\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sin n^0\right] = a^2\frac{1-\sin n^0}{2}$$

$$(3) \qquad \therefore FB = a\sqrt{\frac{1-\sin n^0}{2}}$$

t. c. c. e. d. d.

Făcând pe $n^0 = 45^0$ şi înlocuind în: (1); (2) şi (3) obţinem: $\sphericalangle AMB = 135^0$:

$$BE = \frac{a}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\quad BF = \frac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

deci tocmai rezultatele problemei 669.

HARALAMB P. IONESCU
Lic. Oltenita

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examenul de fine de an

15 Octombrie 1928

Geometria analitică

1°. Se dă punctul fix A în planul axelor dreptunghiulare xOy şi o dreaptă fixă Δ trecând prin O. Fie M un punct mobil pe Ox, P proecţia lui M pe Δ şi Q proecţia lui O pe AM. Să se arate că PQ trece printr'un punct fix când M se mişcă pe Ox.

2°. Se cere ecuaţia hiperbolelor echilatere circumscrise triunghiului OAB, în care O este origina axelor de coordonate, iar A $(a, 0)$, B $(0, b)$. Se duc la aceste hiperbole tangentele paralele cu AB.

Care este locul punctelor de tangenţă?

3°. Să se găsească ecuaţia suprafeţei născută prin rotirea unei elipse date în jurul unei axe date.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol XXXIV, No. 3, Noembrie 1928. Géometrie et mécanique, par *V. Thébault*. Asupra unei propoziţiuni de a lui *Gauss*, de *Şt. Musta*. Concursul *„Gazetei Matematice“*, *C. Malcoci*, *O. Ţino* şi *I. Vardala*, delegaţii Societăţii. Premiul *„Anghel Saligny“*.

PROBLEME REZOLVATE

683. — *Să se găsească numerile mai mici ca 1000000, care să fie în acelaşi timp patrate şi cuburi perfecte.*

SUBLOCOT. EUGEN ST. IACOB

Numerile cerute trebuind să fie în acelaşi timp patrate şi cuburi perfecte, sunt de forma n^6.

Vom ridica deci numerile în ordinea lor naturală la puterea 6^a şi ne vom opri, când vom obţine numere mai mari sau egale cu 1000000. Avem astfel:

$1^6 = 1$, $2^6 = 64$, $3^6 = 729$, $4^6 = 4096$, $5^6 = 15625$, $6^6 = 2^6 \times 3^6 = 46656$, $7^6 = 117649$, $8^6 = 262144$ şi $9^6 = 531441$.

In total avem 9 soluţii.

Soluţii date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Bâcicov P. Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Băjenescu Pantelie* (lic. Caracal), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Cristescu C. Ion* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Drăguţ G. Vasile* (lic. Târgovişte), *Gavrileşcu Vasile* (lic. Braşov), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Licev Ioan* (Şc. Polit., Timisoara), *Magda Ovidiu* (lic. Cluj), *Milea P. Ene* (lic. R.-Sărat), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic. Internat, Iaşi). *Panţu Z. Ion* (Bucureşti), *Petrică I. Ioan* (Şc. de Conduc., Cluj), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Popa Gh. Ioan* (Oltenita), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Roman Î. Ioan* (absolvent, Bucureşti), *Sassu V. Ioan* (lic. Milit, Tg.-Mureş), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Scarlat D.* (lic. Câmpina), *Secăroiu D-tru* (lic. Braşov), *Silvian Emil* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Stan Î. Aurelian* (absolvent, lic. Milit., Iaşi), *Ţiucra Mircea* (lic. Timişoara) şi *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

A mai trimes soluţie, d-l: *Bolgar V. D-tru* (lic. Oltenita).

Observare. D-l *Ionescu P. Haralamb* (Oltenita), a găsit şi numerile întregi patrate şi cuburi perfecte, cuprinse între 1000000 şi 1000000000. Avem astfel:

$11^6 = 1771561$ $18^6 = 34012224$ $25^6 = 244140625$

$12^6 = 2985984$ $19^6 = 47045881$ $26^6 = 308915776$

$13^6 = 4826809$ $20^6 = 64000000$ $27^6 = 387420489$

$14^6 = 7529536$ $21^6 = 85766121$ $28^6 = 481890304$

$15^6 = 11239424$ $22^6 = 113379904$ $29^6 = 594823321$

$16^6 = 16777216$ $23^6 = 148035889$ $30^6 = 729000000$

$17^6 = 23137569$ $24^6 = 191102976$ $31^6 = 887503681$

în acest caz avem 21 soluţiuni.

733*. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$x^2 - px + q = 0,$$

ştiind că, coeficienţii şi rădăcinele sunt nişte numere întregi şi pozitive de o singură cifră, iar numărul format de coeficienţi scrisi unul după altul, este patratul numărului format de rădăcini, srise una după alta.

CAP. I. LINTES

Fie x_1 şi x_2 rădăcinele ecuaţiei date. Conform enunţului avem:

$$1pq = (x_1 x_2)^2, \tag{1}$$

unde $1pq$ este numărul format cu coeficienţii scrişi unul după altul, iar $x_1 x_2$ este numărul format cu

rădăcinele scrise una după alta. Privind relația (1), vedem că $1\,p\,q$ este un patrat perfect de trei cifre, începând cu 1, poate fi deci unul din patratele:

$$100,\ 121,\ 144,\ 169,\ 196,$$

în care caz numărul $x_1 x_2$, ar putea fi respectiv:

$$10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14.$$

Rădăcinele x_1, x_2 ar putea fi deci:

$$(1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4).$$

Trebue să alegem însă dintre acestea, pe acelea care satisfac relațiile între rădăcini și coeficienți, anume:

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = p \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

Constatăm ușor că numai:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,$$

în care caz:

$$p = 2,\ q = 1,$$

satisfac condițiile (1) și (2):

Ecuația dată. ia forma:

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

cu rădăcinele:

$$x_1 = x_2 = 1.$$

Soluții date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjan Petru, Arganini Victor* (lic. Pitești), *Bâcicov P. Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov Victor* (lic. Tighina), *Băjenescu Pantelie* (lic. Caracal), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dobromirescu Petru* (lic. Caracal), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Dumitrescu Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Gavrilescu V.* (lic. Brașov), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Hamparțun Grigore* (lic. Constanța), *Iacob St. Eugen* (Sublocot. de Artilerie), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Levy Jacques* (lic. Matei-Basarab, București), *Licev Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Micula O.* (Șc. Polit., Timișoara), *Milea G. Ene* (lic. R.-Sărat), *Murărolu I.* (lic. Brașov), *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Oighenstein David* (lic. Bălți), *Panțu Z. Ion* (bacalaureat, București), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (absolvent, București), *Sabetay Andrei* (T.-Severin), *Sassu V. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Scarlat D.* (lic. Câmpina), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stratulat Paul* (Brașov), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) și *Vâlsănescu Viorel* (lic. Pitești).

Au mai trimes soluții d-nii: *Cincilian Agop* (lic. Brașov) și *Dimitriu A. Ioan* (absolvent, Galați).

734. — *Să se rezolve ecuația:*

$$x^4 + 2ax^3 - a^2 x = c.$$

SAVIN C. IOAN

Ecuația propusă se poate scri:

$$(x^2 + ax)^2 - a^2(x^2 + ax) - c = 0,$$

care este o ecuație de gradul al 2-lea, în $x^2 + ax$, rezultă deci:

$$x^2 + ax = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4c}}{2}$$

$$\therefore\quad x^2 + ax - \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4c}}{2} = 0.$$

Rezolvând această ecuație, avem:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2\left(a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4c}\right)}}{2},$$

sau:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{3a^2 \pm 2\sqrt{a^4 + 4c}}}{2}.$$

Soluții date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjan Petru, Arganini Victor* (lic. Pitești), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Băjenescu Pantelie* (lic. Caracal), *Cocârlan Pavel* (Șc. Polit., Timișoara), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Darabanțiu Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (Craiova), *Dăscălescu Hristache* (Focșani), *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Dumitrescu Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Gaidaenco Alexie* (lic. Tighina), *Gavrilescu Vasile* (lic. Brașov), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiev Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (Galați), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Iacob St. Eugen* (Sublocot. de Artilerie), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Licev Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Magda Ovidiu* (lic. Cluj), *Mărculescu I. Origen* (lic. Carol, Craiova), *Micula O.* (Șc. Polit., Timișoara), *Murărolu I.* (lic. Brașov), *Oighenstein David* (lic. Bălți), *Panțu Z. Ioan* (absolvent, București), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Popescu O. Adrian* (lic. (Milit., Craiova), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (absolvent, București), *Scarlat D.* (lic. Câmpina), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sprinceană Gheorghe* (absolvent, București), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Stratulat Paul* (Brașov) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

Au mai trimes soluții, d-nii: *Arganini Victor* (lic. Pitești), *Bâcicov P. Boris* (lic. Tighina) și *Sirchis I.* (lic. Tighina).

735. — *Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se rezolve ecuația:*

$$x^3 - p x^2 + r(r_a + r_b + r_c)x - p r^2 = 0.$$

In ce caz ecuația are o rădăcină dublă sau triplă ?

NICOLAE O. ZAHARIA

Observăm, că :

$$(1)\quad p = 3p - 2p = 3p - (a+b+c) = (p-a)+(p-b)+(p-c).$$

Ținând seamă de relațiile cunoscute :

$$r r_c = (p-a)(p-b),\quad r r_a = (p-b)(p-c),$$

$$r r_b = (p-c)(p-a),$$

avem :

$$(2)\qquad r(r_a + r_b + r_c) =$$

$$(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a).$$

Avem încă :

$$p r^2 = r s = \frac{r s^3}{s^2} = \frac{r s^3}{r r_a r_b r_c} = \frac{s^3}{r_a r_b r_c},$$

și cum :

$$p-a = \frac{s}{r_a},\quad p-b = \frac{s}{r_b},\quad p-c = \frac{s}{r_c},$$

rezultă :

$$(3)\qquad p r^2 = (p-a)(p-b)(p-c).$$

Se vede deci că ecuația dată, are rădăcinele :

$$p-a,\quad p-b,\quad p-c,$$

căci relațiile între coeficienții și rădăcinele ei, sunt satisfăcute în virtutea relațiilor (1), (2) și (3). Evident, că avem o rădăcină dublă sau triplă pentru ecuația dată, când triunghiul este isoscel sau echilateral.

Soluții date de d-nii : *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dumitrescu Nicolae* (Șc Polit., Timișoara), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Micula O.* (Șc. Polit., Timișoara), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila), *Panzu Z. Ion* (București), *Pârvu Aurel* (student, București), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (absolvent, București). *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (absolvent, Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara) și *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

A mai trimes soluție, d-l: *Arganini Victor* (lic. Pitești).

736. — *Să se demonstreze relațiile :*

$$1^0.\quad \sum \frac{1}{a}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{abc}\left(4p + abc\sum\frac{1}{a^2} - \frac{p\sum h_a}{2r}\right)$$

$$2^0.\quad \sum \frac{1}{a^2}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{abc}\left(\frac{p\sum h_a}{2r} - 3p\right),$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

COSTACHESCU V. C-TIN

Ținând seamă de relațiile cunoscute :

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc},\quad \cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc},$$

$$b + c = 2p - a,$$

$$\frac{p^2}{a} = \frac{p^2 . h_a}{a h_a} = \frac{p^2 . h_a}{2pr} = \frac{p h_a}{2r},$$

și a analoagelor lor, putem scri :

$$\sum \frac{1}{a^2}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{abc}\left[\frac{(p-b)(p-c)}{a} + \frac{(p-c)(p-a)}{b} + \frac{(p-a)(p-b)}{c}\right] =$$

$$\frac{1}{abc}\left(\frac{bc + pa - p^2}{a} + \frac{ca + pb - p^2}{b} + \frac{ab + pc - p^2}{c}\right) = \frac{1}{abc}\left(3p + abc\sum\frac{1}{a^2} - \frac{p\sum h_a}{2r}\right)$$

Prima identitate este astfel stabilită.

Avem de asemenea :

$$\sum \frac{1}{a^2}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{abc}\left[\frac{p(p-a)}{a} + \frac{p(p-b)}{b} + \frac{p(p-c)}{c}\right]$$

$$= \frac{1}{abc}\left(\frac{p^2}{a} + \frac{p^2}{b} + \frac{p^2}{c} - 3p\right) = \frac{1}{abc}\left(\frac{p\sum h_a}{2r} - 3p\right)$$

A doua identitate este și ea stabilită.

Soluții date de d-nii : *Aldea Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Bâcicov Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov Victor* (lic. Tighina), *Bâjenescu Pantelie* (lic. Caracal), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Cincilian Agop* (lic. Brașov), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dobromirescu P.* (Caracal), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Gavrilescu Vasile* (lic. Brașov), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiev Nicolae*. *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Micula O.* (Șc. Polit., Timișoara), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila). *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Panțu Z. Ion* (București), *Pârvu Aurel* (student, București), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (absolvent, București), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Savin C. Ioan* (lic. Milit, Iași), *Scarlat D.* (lic. Câmpina), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Țiucra Mircea* (Timișoara), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

737*. — *Știind că p este un număr întreg, se cere să se găsească valoarea întreagă a lui q, pentru care numărul $2pq+1$ se divide prin numărul $2p+1$,*

COL. GH. BUICLIU

Observăm că:

$$\frac{2pq+1}{2p+1} = q - \frac{q-1}{2p+1}.$$

Pentru ca $2pq+1$ să se dividă prin $2p+1$, trebuie ca:

$$\frac{q-1}{2p+1} = n, \qquad (n \text{ întreg}),$$

de unde deducem:

$$(1) \qquad q = n(2p+1)+1.$$

Aceasta este forma generală a lui q.

Soluții date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Arganini Victor* (lic. Pitești), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Dănciulescu Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Gavrilescu Vasile* lic. Brașov), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Panțu Z. Ion* (ba-a laureat), București), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Roman I. Ioan* (absolvent, București), *Sassu V. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Spriuceană Gheorghe* (absolvent, Galați), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

Au mai trimes soluții d-nii; *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița) și *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara).

Soluție particulară, dată de d-nii: *Cristescu C. Ion*, *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), și *Licev Ion* (Șc. Polit., Timișoara).

Notăm, $2p = x$, și acum trebuie ca expresia: $qx+1$ să se dividă cu $x+1$.

Pentru aceasta, trebuie ca $qx+1$, să fie de forma:

$$qx+1 = x^{2m+1}+1 \quad (m \text{ întreg pozitiv}),$$

căci se anulează pentru, $x=-1$, deci trebuie să luăm:

$$q = x^{2m} = (2p)^{2m}.$$

Evident că acesta este o valoare particulară a lui q, cuprinsă în (1), pentru:

$$n = \frac{(2p)^{2m}-1}{2p+1} = (2p)^{2m-1} - (2p)^{2m-2} + (2p)^{2m-3} - \ldots + 2p - 1.$$

Observare. Au dat soluția banală, $q=1$, d-nii: *Bâcicov Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov Victor* (lic. Tighina), *Băjenescu Pantelie* (lic. Caracal), *Scarlat D.* (lic. Câmpina) și *Vonica C. Ion* (lic. Tg.-Jiu).

740. — *Să se găsească limita expresiunei:*

$$E = \sqrt[4]{x^4+x^3+1} \quad \sqrt[3]{x^3+x^2+1},$$

pentru $x=\infty$.

SUBLOCOT EUGEN ȘT. IACOB

Prima soluție. Pentru $x=\infty$, avem $\infty - \infty$, deci putem scri succesiv:

$$E = \left(\sqrt[4]{x^4+x^3+1} - x\right) - \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - x\right) =$$

$$\frac{x^3+1}{\sum_{k=0}^{3} x^k \sqrt[4]{(x^4+x^3+1)^{3-k}}} - \frac{x^2+1}{\sum_{k=0}^{2} x^k \sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^{2-k}}}$$

$$= \frac{x^3+1}{\sum_{k=0}^{3} x^3 \sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)^{3-k}}} - \frac{x^2+1}{\sum_{k=0}^{2} x^2 \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{2-k}}} =$$

$$\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\sum_{k=0}^{3} \sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)^{3-k}}} - \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sum_{k=0}^{2} \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{2-k}}}.$$

Pentru, $x=\infty$, acum găsim:

$$E = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}.$$

Generalizare. Dacă am fi avut de aflat limita pentru $x=\infty$, a expresiunei mai generale:

$$E = \sqrt[p]{x^p+x^{p-1}+\ldots+x+1} - \sqrt[q]{x^q+x^{q-1}+\ldots+x+1},$$

procedând, ca mai sus, aveam:

$$E = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{q-p}{pq},$$

Soluții și generalizare date ds d-nii: Ghișoiu I. Petre (lic. Spiru Haret, București), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Sirchis I.* (lic. Tighina), și *Stan C. Ioan* (lic. Milit., Iași),

Soluția 2-a. Putem scri succesiv:

$$E=\sqrt[4]{x^4+x^3+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+1}=$$

$$\sqrt[12]{(x^4+x^3+1)^3}-\sqrt[12]{(x^3+x^2+1)^4}=$$

$$\frac{(x^4+x^3+1)^3-(x^3+x^2+1)^4}{\sum_{k=0}^{11}\sqrt[12]{(x^4+x^3+1)^{33-3k}(x^3+x^3+1)^{4k}}}.$$

Observăm, că:

$$(x^4+x^3+1)^3-(x^3+x^2+1)^4=x^{12}+3x^8(x^3+1)+$$

$$3x^4(x^3+1)^2+(x^3+1)^3-x^{12}-4x^9(x^2+1]-$$

$$6x^6(x^2+1)^2-4x^6(x^2+1)^3-(x^2+1)^4=-x^{11}+P_{10}(x)$$

unde $P_{10}(x)$ înseamnă un polinom de gradul 10.

Atunci:

$$E=\frac{-x^{11}+P_{10}(x)}{\sum_{k=0}^{11}\sqrt[12]{(x^4+x^3+1)^{33-3k}(x^3+x^2+1)^{4k}}}=$$

$$\frac{-1+\dfrac{P_{10}(x)}{x^{11}}}{\sum_{k=0}^{11}\sqrt[12]{\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^{33-3k}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^{4k}}}.$$

Pentru, $x=\infty$, avem:

$$E=-\frac{1}{12}.$$

Soluții date de d-nii: *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Cralova), *Levy Jacques* (lic. Matei-Basarab, București), *Licev Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conduct, Cluj) și *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași).

Soluția 3-a. Dacă notăm:

$$x=\frac{1}{\alpha},$$

expresia dată devine:

$$E=\frac{\sqrt[4]{\alpha^4+\alpha+1}-\sqrt[3]{\alpha^3+\alpha+1}}{\alpha},$$

a cărei valoare trebue s'o aflăm pentru, $\alpha=0$.

Cum pentru $\alpha=0$, expresia ia forma $\frac{0}{0}$, putem aplica teorema lui *Hôpital* și avem:

$$E=\lim_{\alpha=0}\left(\frac{4\alpha^3+1}{4\sqrt[4]{(\alpha^4+\alpha+1)^3}}-\frac{3\alpha^2+1}{3\sqrt[3]{(\alpha^3+\alpha+1)^2}}\right)=$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}.$$

Soluții date de d-nii: *Micula O.* (Șc. Polit., Timișoara), *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila), *Pantu Z. Ion* (bacalaureat, București).

Soluția 4-a. Expresia dată se poate scri:

$$E=\frac{1-\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+x^3+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^4+x^3+1}}}.$$

Cum pentru, $x=\infty$, această expresie se reduce la $\frac{0}{0}$, aplicăm teorema lui *Hôpital*, și avem:

$$E=-\lim_{x=\infty}\frac{\dfrac{(3x^2+2x)\sqrt[4]{x^4+x^3+1}}{3\sqrt[3]{(x^2+x^2+1)^2}}=\dfrac{(4x^3+3x^2)\sqrt[3]{x^3+x^2+1}}{4\sqrt[4]{(x^4+x^3+1)^3}}}{-\dfrac{4x^3+3x^2}{4\sqrt[4]{(x^4+x^3+1)^3}}}.$$

sau:

$$E=\lim_{x=\infty}\frac{4(3x^2+2x)(x^4+x^3+1)-3(4x^3+3x^2)(x^3+x^2+1)}{3(4x^3+3x^2)\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}}=\lim_{x=\infty}\frac{-x^5-x^4-12x^3+3x^2+8x}{3(4x^3+3x^2\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}}=$$

$$\lim_{x=\infty}\frac{-1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{8}{x^4}}{3\left(4+\dfrac{3}{x}\right)\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^2}}=-\frac{1}{12}.$$

Soluții date de d-nii: *Licev Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Gheorghiev N.* (Bolgrad), *Roman I. Ioan* (absolvent, București), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Sprinceană Gheorghe* (absolvent, lic. Galați) și *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

Au mai mai trimes soluții, d-nii: *Arganini Victor* (lic. Pitești), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Levy Jacques* (lic. Matei-Basarab, București), *Popescu Virgil* (Șc. Polit., Nancy) și *Savin C. Ion* (iic. Milit,, Iași).

Soluția 5-a dată de autor și de d-nii: *Mârculescu I. Origen* (Siliștea-Dolj), *Saur Ion* (Șc. Polit., Timișoara).

Expresia dată se poate scri:

$$E = x\left[1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)\right]^{\frac{1}{4}} - x\left[1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}.$$

Cum pentru valori mari a lui x, avem:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}<1 \quad \text{și} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}<1,$$

putem desvolta parantesele mari în serie și reducând primii termeni a desvoltărilor, găsim:

$$E = x\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)-\frac{3}{32}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)^2+\dots\right]-$$

$$x\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2+\dots\right]=$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4x^3}-\dots-\frac{1}{3}-\frac{1}{3x^2}+\dots,$$

care pentru $x=\infty$, ne dă:

$$E=-\frac{1}{12}.$$

Observare. Fiecare din ultimele 4 soluții se pot generaliza ca și în cazul soluției 1-a.

742*. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\text{art tg}\,\frac{x}{1+a^2-ax}-\text{arc tg}\,(x-a)=k\pi+\text{arc tg}\,a,$$

unde, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n, \dots$

V. ALACI

Dacă notăm:

$$(1)\qquad \text{arc tg}\,\frac{x}{1+a^2-ax}=u, \quad \text{arc tg}\,(x-a)=v,$$

primul membru al relației date, devine:

$$u-v,$$

și luând tangenta, avem;

$$(2)\qquad \text{tg}\,(u-v)=\frac{\text{tg}\,u-\text{tg}\,v}{1+\text{tg}\,u\,\text{tg}\,v},$$

Cum din (1), rezultă:

$$\text{tg}\,u=\frac{x}{1+a^2-ax}, \quad \text{tg}\,v=x-a,$$

relația (2) devine:

$$\text{tg}\,(u-v)=\frac{\dfrac{x}{1+a^2-ax}-(x-a)}{1+\dfrac{x^2-ax}{1+a^2-ax}}=$$

$$\frac{a+a^3-2a^2x+ax^2}{1+a^2-2ax+x^2}=a.$$

De aci deducem:

$$u-v=k\pi+\text{arc tg}\,a,$$

sau:

$$\text{arc tg}\,\frac{x}{1+a^2-ax}-\text{arc tg}\,(x-a)=k\pi+\text{arc tg}\,a,$$

adică tocmai identitatea dată:

Soluții date de d-nii: *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Cristescu C. Ion*, *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (Craiova), *Dumitrescu Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Ganea Vasile* (bacalaureat, București), *Gheorghiev Nicolae* (Bolgrad), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Licev Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Micula O.* (Șc. Polit., Timișoara), *Milea Ene* (lic. R.-Sărat), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conduct., Cluj), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (absolvent, București), *Sabetay Andrei* (student, București), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (absolvent lic. Milit., Iași), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

744. — *Să se rezolve ecuația:*

$$x^3-\frac{r_a+r_b+r_c}{p}x^2+x-\frac{s}{p^2}=0,$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu oarecare.

AUREL PARVU

In virtutea relațiilor cunoscute:

$$r_a=p\,\text{tg}\,\frac{A}{2}, \quad s^2=r\,r_a\,r_b\,r_c, \quad \Sigma\,\text{tg}\,\frac{A}{2}\,\text{tg}\,\frac{B}{2}=1, \quad s=p\,r$$

putem scri:

$$(1)\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r_a+r_b+r_c}{p},$$

$$(2)\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1,$$

$$(3)\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r_a r_b r_c}{p^3}=\frac{s^2}{p^3 r}=\frac{s}{p^2}.$$

Privind ecuația dată și relațiile (1), (2), (3), suntem îndreptățiți a afirma că $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ sunt rădăcinele ecuației date, căci relațiile (1), (2), (3) scriu relațiile dintre rădăcini și coeficienți.

Dacă triunghiul este isoscel ecuația dată are o rădăcină dublă, iar dacă este echilateral, ecuația dată e rădăcină tripiă.

Soluții date de d-nii: *Aldea Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Bucurescu Ion* (Șc. Milit., de Geniu), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani), *Dănculescu Gr. Virgiliu* (Craiova), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Drăguț G. Vasile* (lic Târgoviște), *Dumitrescu Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Gheorghe Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Gheorghiu Gh. Mircea* (Tg.-Jiu), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Iacob Eugen* (Sublocot. de Artilerie), *Ioneseu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Marinaș Marin* (Șc. Milit. de Geniu), *Micula O.* (Șc. Polit., Timișoara), *Murărolu I.* (lic. Brașov), *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila), *Panțu Z. Ion* (bacalaureat, București), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conduct., Cluj), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (absolvent, București), *Savin Arnold* (lic. Focșani), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galați), *Stan I. Aurelian* (absolvent, lic. Milit., Iași), *Țiucra Mircea* (lic Timișoara), *Vonica C. Ion* (lic. Tg.-Jiu) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

Observare. Această problemă este propusă și în „G. M.", an. XXXIII, No. 2, sub No. 3590.

PROBLEME PROPUSE

773. — Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre, în care prima cifră este egală cu a treia și cu ultima, a patra cifră scrisă după a treia dă un patrat perfect; în fine a doua cifră este egală cu suma cifrelor a treia și a patra.

EMIL MEREUTA

774. — Să se găsească cifrele a și b, astfel ca:

$$(8\,a\,8)^n-(3\,b\,3)^n=\text{mult. } 9.$$

SAVIN C. IOAN

775. — Se dă un triunghiu isoscel ABC ($AB=AC$). Fie A_1 piciorul perpendicularei din A pe BC și B_1, C_1, punctele determinate de bisectoarele unghiurilor AA_1B și AA_1C pe AB și AC. Bisectoarele unghiurilor A_1AB și A_1AC determină punctele M și N pe A_1B_1 și A_1C_1. Să se arate că patrulaterul MNB_1C_1 este un trapez isoscel.

CEZAR COSNITA.

776. — Să se rezolve ecuația:

$$(5+\sqrt{24-x^2})^n-(1-ix)^n=0.$$

unde $i=\sqrt{-1}$.

V. ALACI

777. — Să se afle limita expresiunei:

$$E=\frac{y^3-5xy^2+16x^3-4}{3y^4+(5x+7)y+x^2-48},$$

pentru, $x=1$, $y=2$, soluții a ecuației:

$$5y^4-3xy^3+(2x^3-7x+2)y-15x^4+2x^2-5x-32=0.$$

VONICA C IOAN

778. — Să se studieze variațiunea funcțiunei:

$$y=\frac{1}{84}\begin{vmatrix} 7x & 12 & 4xy+52 \\ 14 & \dfrac{9}{x} & \dfrac{4x^3+36}{x} \\ 28x & 9 & 36+x^2 \end{vmatrix}$$

ALMAJAN PETRU

779. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y=k_1\pi+a+b \\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-y}{1+xy}=k_2\pi+2a, \end{cases}$$

unde k_1 și k_2 pot avea una din valorile $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n$.

Caz particular: $k_1=k_2=0$, $a=60^0$, $b=30^0$.

IOAN C. CRISTESCU

Observare. La problema 748 se face următoarea corecțiune. In loc de: Să se arate că figura $IPMN$ este un paralelogra, se va citi: Să se arate că figura IPM_1N este un paralelogram, M_1 fiind piciorul perpendicuarei din N pe BC.

INFORMAȚIUNI

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

— —

Fie-care problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

— —

Nu se pot lua în seamă pentru problemele de *Concurs,* de cât acelea sosite la timp și anunțate în revistă.

Problemele propuse de corespondenții înscriși la *Concurs,* se socotesc cu numărul de puncte corespunzător, ca oricărui rezolvător înscris pentru *Concurs.*

— —

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

— —

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

— —

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri unmere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

— —

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

Sucursala Timişoara

ANUL VIII. 15 IANUARIE 1929 NO. 11

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. COL. GH. BUICLIU. RELATIUNI METRICE INTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHIU PLAN.
2. NOTE MATEMATICE, 25, 26.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 699, 724, 731, 738, 741, 743, 746, 749.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vorfi trimise pe adresa: **V. Alaci** —profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.

ANUL VIII — No. 11. TIMISOARA, 15 IANUARIE 1929

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

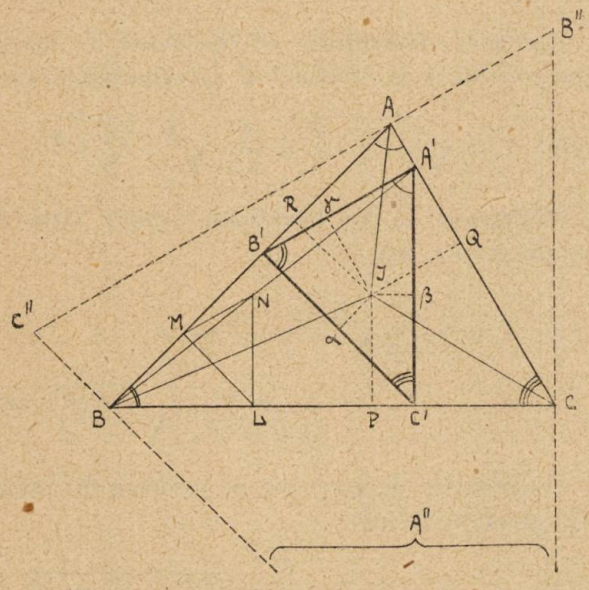
RELAȚIUNI METRICE INTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHIU PLAN

de COL GH. BUICLIU

Problema 699 a cărei soluție se dă în acest număr la pag. 167, a fost propusă în numărul dela 15 Februarie 1928, pentru concursul publicat de R. M. T., la pag. 147, vol. VII.

Dintre puținele soluții primite, nici una nu a dat rezultate mai complecte pentru partea III a problemei iar pentru prima parte nu s'au dat soluțiuni directe.

Iată un mijloc care dă direct una din relațiunile din enunțul problemei 699.



Fie I centrul cercului înscris triunghiului A B C și P, Q, R proecțiile lui I pe B C, C A, A B; α, β, γ, proecțiile aceluiași punct I pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$.

Avem:

$$IP = IQ = IR = r.$$

Apoi din faptul că $A'B'C'$ are laturile perpendiculare pe laturile lui A B C rezultă:

$$IP = \alpha C' = \beta A' = \gamma B' = r.$$

Cu acestea se vede că:

$$\overline{IC'}^2 - \overline{IB'}^2 = r^2 - (a' - r)^2$$

$$\overline{IA'}^2 - \overline{IC'}^2 = r^2 - (b' - r)^2$$

$$\overline{IB'}^2 - \overline{IA'}^2 = r^2 - (c' - r)^2.$$

Adunând aceste trei egalități se găsește:

$$3r^2 - (a' - r)^2 - (b' - r)^2 - (c' - r)^2 = 0$$

$$\therefore \quad r = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{2(a' + b' + c')}.$$

Adică prima relație de demonstrat.

Procedând la fel, însă plecând dela centrele cercurilor exînscrise se demonstrează direct și celelalte relațiuni din enunț.

* * *

Trec la ultima parte a problemei, la calculul elementelor lineare și unghiulare ale triunghiului A B C în funcție de a', b', c'. Și această parte se poate rezolva direct, fără a trece prin calculul raportului de asemănare cum au făcut rezolvitorii problemei 699.

Insemn pentru prescurtare.

$$a' + b' + c' = 2p'$$

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = T',$$

și atunci relațiile din enunț devin:

$$(1)\qquad r=\frac{T'}{4p'};\quad r_a=\frac{T'}{2(b'+c'-a')};\ldots$$

Relațiunile (1) sunt suficiente pentru a rezolva partea III-a a problemei și pentru a reaminti corespondenților noștri o serie de formule utile și interesante între elementele unui triunghiu, formule care se găsesc în formulare și în tratate de geometrie și pe care formule, corespondenții ce se interesează de ele, nu vor avea mare dificultate să le demonstreze.

Este deci vorba de a calcula elementele triunghiului ABC în funcție de a', b', c' cunoscând relațiunile (1).

Ralculul lui R, raza cercului circumscris triunghiului ABC. Plec dela formula:

$$(2)\qquad 4R=r_a+r_b+r_c-r$$

$$\therefore\ 8R=T'\left[\frac{1}{a'+b'-c'}+\frac{1}{b'+c'-a'}+\frac{1}{c'+a'-b'}-\frac{1}{a'+b'+c'}\right].$$

$$\therefore\ 8R=\frac{T'}{2}\cdot\frac{a'b'c'}{p'(p'-a')(p'-b')(p'-c')}$$

$$\therefore\ R=\frac{a'b'c'T'}{16S'^2},$$

unde S' reprezintă suprafața triunghiului A'B'C',

Calculul perimetrului p se deduce din formula:

$$(3)\qquad p^2=r_a r_b+r_b r_c+r_c r_a$$

$$\therefore\ p=\frac{p'T'}{4S'}.$$

Calculul laturilor a, b, c. Avem:

$$(4)\qquad a=\frac{r_a(r_b+r_c)}{p}=\frac{a'T'}{4S'}.$$

Calculul înălțimei h_a se face utilizând formula:

$$(5)\qquad h_a=\frac{bc}{2R}=\frac{T'}{2a'}.$$

Asociind (4) cu (5) găsim:

$$S=\frac{1}{2}a\,h_a=\frac{T'^2}{16S'}.$$

Pentru bisectoarea interioară l_a utilizez formula:

$$(6)\qquad l_a=\frac{2\sqrt{p(p-a)bc}}{b+c},$$

în care țin seamă de rezultatele dela (3) și (4) și găsesc:

$$l_a=\frac{T'\sqrt{p'(p'-a')b'c'}}{2S'(b'+c')}.$$

Bisectoarea exterioară l_{1a} se găsește prin formula:

$$(7)\qquad l_{1a}=\frac{2}{b-c}\sqrt{(p-b)(p-c)bc}=\frac{T'}{2(b'-c')S'}\sqrt{(p'-b')(p'-c')b'c'}$$

în care s'a presupus $b>c$.

Mediana m_a este dată de formula:

$$(8)\qquad m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\frac{T'}{8S'}\sqrt{2(b'^2+c'^2)-a'^2}$$

Segmentul de înălțime h'_a cuprins între vârf și ortocentru se calculează prin formula:

$$(9)\qquad h'_a=\sqrt{4R^2-a^2}=\frac{a'T'}{8S'}\sqrt{b'^2c'^2-4S'^2}.$$

Valoarea segmentului de bisectoară l'_a cuprins între vârful A și centrul I al cercului înscris este:

$$(10)\qquad l'_a=\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}=\frac{T'}{4S'}\sqrt{\frac{b'c'(p'-a')}{p'}}.$$

Segmentul l''_a din bisectoară cuprins între piciorul ei și I este:

$$(11)\qquad l''_a=\frac{a}{b+c}\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}=\frac{a'T'}{4S'(b'+c')}\sqrt{\frac{b'c'(p'-a')}{p'}}.$$

Segmentele determinate pe mediană de centrul de greutate G sunt:

$$(12)\qquad m'_a=\frac{2}{3}m_a=\frac{T'}{12S'}\sqrt{2(b'^2+c'^2)-a'^2}$$

$$(13)\qquad m''_a=\frac{1}{3}m_a=\frac{T'}{24S'}\sqrt{2(b'^2+c'^2)-a'^2}.$$

Segmentul de înălțime h_a'' cuprins între ortocentru și piciorul înălțimei este:

$$(14)\qquad h_a'' = \frac{h_b' h_c'}{2R} =$$

$$\frac{T'}{8a'}\sqrt{(a'^2c'^2 - 4S'^2)(b'^2a'^2 - 4S'^2)}.$$

Mediatoarea k_a este:

$$(15)\qquad k_a = \frac{h_a'}{2} = \frac{a'T'}{16S'}\sqrt{b'^2c'^2 - 4S'^2}.$$

Distanța O I între centrele cercurilor circumscris și înscris;

$$(16)\qquad OI = \sqrt{R^2 - 2Rr} =$$

$$\frac{T'}{16S'^2}\sqrt{a'^2b'^2c'^2 - \frac{4a'b'c'S'^2}{p'}}.$$

Lungimea II_a se calculează la fel prin formula:

$$(17)\qquad II_a = \sqrt{R^2 + 2Rr} =$$

$$\frac{T'}{16S'^2}\sqrt{a'^2b'^2c'^2 + \frac{4a'b'c'S'^2}{p'}}.$$

Depărtarea O H este dată de:

$$(18)\qquad OH = \sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)} =$$

$$\frac{T'}{4S'}\sqrt{\frac{9a'^2b'^2c'^2}{16S'^2}} - T'.$$

Valoarea lui O G este dată prin formula analoagă:

$$(19)\qquad OG = \sqrt{R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}} =$$

$$\frac{T'}{12S'}\sqrt{\frac{9a'^2b'^2c'^2}{16S'^2}} - T'.$$

Distanța G I este dată de:

$$(20)\qquad GI = \frac{1}{3}\sqrt{p^2 + 5r^2 - 16Rr} =$$

$$\frac{T'}{12}\sqrt{\frac{p'^2}{S'^2} + \frac{5}{p'^2} - \frac{4a'b'c'}{p'}}.$$

Distanța GI_a este dată de formula mai complicată:

$$(21)\qquad GI_a = \frac{1}{3}\sqrt{p^2 + 6r_a^2 - r^2 + 12Rr_a - 4Rr}$$

în care urmează a înlocui pe p, r, R și r_a prin valorile lor.

De aici încolo voi enumăra încă următoarele formule pentru calculul elementelor triunghiului A B C, formule în care se pot înlocui valorile diferitelor lungimi in funcție de laturile a', b', c':

$$(22)\qquad O_aI = \frac{R}{2} - r$$

$$(23)\qquad O_aI_a = \frac{R}{2} + r_a$$

$$(24)\qquad HI = \sqrt{4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2}$$

$$(25)\qquad OI_a = \sqrt{R^2 + 2Rr_a}.$$

Apoi pentru unghiuri avem:

$$\sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{2S'}{b'c'}, \qquad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Urmând pe această cale se pot calcula și elemente lineare sau unghiulare din geometria triunghiului.

Iată câteva exemple:

Pentru simediana s_a a triunghiului A B C avem formula:

$$(26)\qquad s_a = \frac{bc}{b^2 + c^2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} =$$

$$\frac{b'c'T'}{4(b'^2 + c'^2)S'}\sqrt{2(b'^2 + c'^2) - a'^2}.$$

Segmentul t_a de tangentă la cercul O, cuprins între A și latura B C este dat de:

$$(27)\qquad t_a = \frac{abc}{a^2 - b^2} = \frac{a'b'c'T'}{4S'(b'^2 - c'^2)}.$$

Distanța x_a a punctului lui *Lemoine* la latura B C:

$$(28)\qquad x_a = \frac{2aS}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{a'T'^2}{32S'}.$$

Distanța k dela punctul lui *Lemoine* la O este:

$$(29) \qquad k=\sqrt{R^2-3\frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)}}.$$

Raza ϱ a primului cerc a lui *Lemoine* este dată de:

$$(30) \quad \varrho=\frac{R}{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=$$

$$\frac{a'b'c'}{4S'T'}\sqrt{a'^2b'^2+b'^2c'^2+c'^2a'^2}.$$

In fine unghiul lui *Brocard* este dat de:

$$(31) \qquad \operatorname{cotg}\omega=\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C$$

$$=\frac{a'^2+b'^2+c'^2}{4S'}$$

$$\therefore \quad \operatorname{cotg}\omega=\frac{T'}{4S'},$$

formulă care prin simplicitatea ei ar putea conduce la aplicațiuni interesante.

Mă opresc aici cu enumărarea acestor formule. Se vede din întrebuințarea lor cât de parțială este soluția dată părței a III-a a problemei 699, de către rezolvitorii ei.

NOTE MATEMATICE

25. *Generalizarea problemei 737.* Problema cu acest număr, rezolvată la pagina 155, din vol. VIII, se poate generaliza în felul următor:

„Știind că p este un număr întreg, se cer valorile întregi ale lui q pentru care numărul apq+b se divide prin numărul ap+b“.

Fracția:

$$(1) \quad F=\frac{apq+b}{ap+b}=\frac{ap+b+ap(q-1)}{ap+b},$$

trebue să se reducă la un număr întreg. Observ că atât *a* cât și *p* trebue să fie prime cu *b*, căci dacă aceste perechi de numere ar avea un divizor comun n-avem decât să simplificăm ambii termeni ai fracției cu acel divizor.

Din (1) se scoate:

$$F=1+\frac{ap(q-1)}{ap+b}.$$

Pentruca F să fie întreg trebue ca $ap+b$ să dividă produsul $ap(q-1)$. Deci trebue să avem:

$$ap(q-1)=\lambda(ap+b)$$

$$\therefore \quad q=1+\lambda\frac{ap+b}{ap}.$$

De oarece *a* și *p* sunt primi cu *b* și de oarece produsul *ap* nu poate divide suma $ap+b$ fără a divide și pe *b*, urmează deci că;

$$\lambda=n(ap)$$

$$\therefore \quad q=n(ap+b)+1.$$

Aceasta este forma generală a lui *q*. Valoarea întreagă a lui F, dedusă din (1), este atunci:

$$nap+1.$$

Soluțiile date la pagina 155, pe lângă că sunt pentru cazuri mai particulare, dar întrebuințează cunoștiințe de algebră, împărțire de polinoame, ceiace nu a fost în intenția mea la propunerea problemei.

COL. GH. BUICLIU

26. — *Aria unui triunghiu în funcție de raza cercului înscris și razele cercurilor exînscrise.*

Se știe că:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ținând seamă de relațiile:

$$S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$$

$$S=\sqrt{p\frac{S}{r_b}\cdot\frac{S}{r_c}\cdot\frac{S}{r_a}}=\sqrt{p\frac{S^3}{r_ar_br_c}}=\sqrt{p\frac{p^3r^3}{r_ar_br_c}}$$

$$=\sqrt{\frac{p^4r^3}{r_ar_br_c}}=p^2\sqrt{\frac{r^3}{r_ar_br_c}}.$$

Cum, $p^2=\Sigma r_ar_b$, avem:

$$S=\sqrt{\frac{r^3}{r_ar_br_c}}\,\Sigma r_ar_b.$$

RAMNICEANU I CRISTIAN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIV, No. 4 Decembrie 1928. Câteva clase de polinoame cu toate rădăcinile reale, polinoamele lui *Hermite* (urmare), de *Alex. Niculescu*. Fluxul şi refluxul oceanelor, de Ing. *Al. Cehlarov*.

2. *Buletinul Societăţii de Ştiinţe din Cluj*. Tome IV, fasc. 2, Noembrie 1928. Sur les fonctions analytiques, dont aucune fonction limite n'est constante, par *Paul Montel*. Sur certains mouvements plans stationnaires des liquides visqueux incompressibles, par *Alfred Rosenblatt*. Un théorème sur les limites des suites numériques, par *M. Biernacki*. Monogénéité et holomorphie, par *D. Pompeiu*. Température et gravitation. Quelques remarques critiques sur une note du même titre de Mr. *Aug. Maior*, par *N. Bărbulescu*. Sur l'article de Mr. Bărbulescu: „Essai d'une théorie quantique des Gaz et des solutions", par *A. Maior*. Sur les courbes de convergence des séries procédant suivant les inverses de polynomes donnés, par *N. Abramescu:* Sur une classe de développements en série d'une fonction holomorphe, par *Th. Anghelutză*. Sur les intégrales de *Laplace*, par *A. Anghelescu*. Couples de transformations et transcendantes uniformes corrélatives, par *O. Onicescu:* Sur quelques systémes aux dérivées partielles, par *Miron Nicolescu:* Sur le théorème des accroissements finis, par *D. Pompeiu*. Sur la relation entre l'énergie superficielle des liquides et la tension de la vapeur saturante, par *N. Barbulescu*.

3. *Revista Universitară Matematică*. 1(1) (ediţia 2-a), redactată de *Rodolphe Raclis*, Profesor aststent la Universitate str. Porumbaru 70. Bucureşti II. Conţinutul este anunţat la Bibliografie, în „R. M." No. 9, 1928.

4. *Petru Sergescu. Gândirea Matematică:* Această carte (192 pag. format mic) se citeşte cu multă plăcere şi interes. Autorul ei, distinsul profesor de la Universitatea din Cluj, spune în prefaţă:

„Scopul cărţei a fost să atragă luarea aminte a marelui public, asupra frumuseţei ştiinţei matematice, atât de nedreptăţită în judecata celor mulţi şi asupra însemnătăţei ei. E un suflet, o gândire a matematicei care poate fi întrevăzut şi altfel de cât prin calcule".

Scopul cărţei este în adevăr pe deplin ajuns: Cuprinsul ei valorifică importanţa ştiinţelor matematice, arată legătura ei cu celelalte ştiinţe şi deschide orizonturi de gândire, noi şi senine. Cartea cuprinde: Prefaţa. Evoluţia gândirei matematice. Creaţia matematică. Făpturile (noţiunile) matematice. Metodele gândirei matematice. Domeniul matematicei. Matemaiica şi ştiinţa. Matematica şi viaţa.

Recomandăm călduros corespondenţilor noştri această carte, pe care fiecare trebue s'o citească şi adâncească. A se adresa autorului la Universitatea din Cluj. Preţul 60 lei.

PROBLEME REZOLVATE

699*. — *Intr'un triunghiu* A B C *să se înscrie un alt triunghiu* A′ B′ C′ *ale cărui laturi* A′ B′, B′ C′, C′ B′ *să fie respectiv perpendiculare pe* B C, C A, A B. *Dacă* a', b', c' *sunt laturile triunghiului* A′ B′ C′, *iar* r, r_a, r_b, r_c *sunt razele cercului înscris şi ale cercurilor exînscrise triunghiului* A B C, *să se demonstreze relaţiunile:*

$$2r = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{a' + b' + c'}; \quad 2r_a = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{b' + c' - a'}$$

$$2r_b = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{c' + a' - b'}; \quad 2r_c = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{a' + b' - c'}.$$

Să se deducă apoi formule care să dea elementele lineare şi unghiulare ale triunghiului A B C *în funcţie de* a', b' *şi* c'.

COL. GH. BUICLIU.

Soluţie dată de d-nii *Dimitriu A. I.* şi *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. din Galaţi).

I. Construesc triunghiul A″ B″ C″ circumscris triunghiului A B C şi având laturile perpendiculare pe ale acestuia din urmă. Triunghiurile A″ B″ C″ şi A′ B′ C′ având laturile paralele sunt asemenea şi deci problema construcţiei triunghiului A′ B′ C′ se reduce la următoarea problemă tratată în *Traité de géometrie par Rouché et de Comberousse.* (Première partie, septième edition page 262).

Intr'un triunghiu dat A B C *să se înscrie un triunghiu* A′ B′ C′ *asemenea cu un triunghiu dat* A″ B″ C″.

Iată soluţia, dată acolo, acestei probleme. Se duce L M paralel cu A″ C″, L fiind un punct luat la întâmplare pe B C iar M pe A B. Din L şi M se duc paralele la A″ B″ şi B″ C″ şi se obţine punctul N. Unind B cu N se găseşte prin intersecţia lui B N cu A C vârful A′ al triunghiului căutat.

Din A′ se duc paralele la B″ C″ şi B″ A″ care ne dau celelalte vârfuri B′, C′. Am notat cu A′, B′, C′ vârfurile ale căror unghiuri sunt egale respectiv cu A, B, C, iar nu cum se obişnueşte de obicei de a se nota cu A′ puncte de pe B C, cu B′ puncte de pe C A, etc.

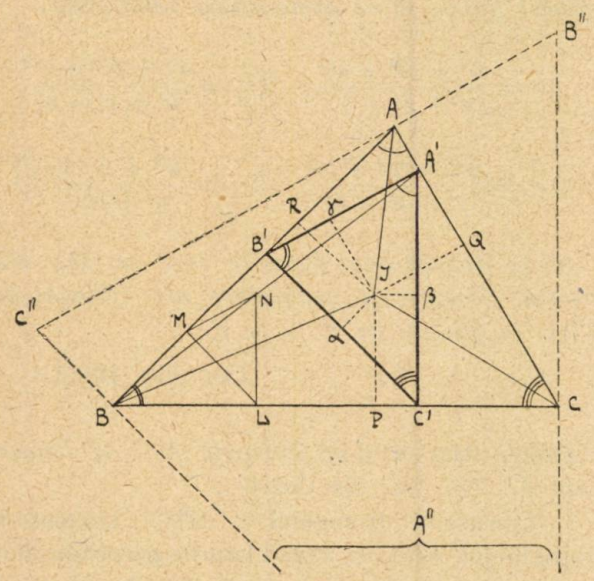
II. Triunghiurile A B C, A′ B′ C′ fiind asemeni, între laturile lor există relaţiunile:

$$(1) \qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \lambda,$$

λ fiind raportul de asemănare. Apoi avem:

$$(2) \qquad S = S_{A\,A'\,B'} + S_{B\,B'\,C'} + S_{C\,C'\,A'} + S',$$

unde S′ reprezintă suprafaţa triunghiului A′ B′ C′.



Din (2) se scoate:

$$S = \frac{c'\,A\,B'}{2} + \frac{a'\,B\,C'}{2} + \frac{b'\,C\,A'}{2} + S'$$

$$\therefore\ 2\,S = c'^2 \operatorname{cotg} A + a'^2 \operatorname{cotg} B + b'^2 \operatorname{cotg} C + 2\,S'.$$

Sau ţinând seamă de (1) şi de:

$$S' = \lambda^2\,S,$$

găsim:

$$(3) \quad 2\,S = \lambda^2 (a^2 \operatorname{cotg} B + b^2 \operatorname{cotg} C + c^2 \operatorname{cotg} A + 2\,S).$$

Insă avem:

$$a^2 \operatorname{cotg} B + b^2 \operatorname{cotg} C + c^2 \operatorname{cotg} A =$$

$$\frac{a^2 \cos B}{\sin B} + \frac{b^2 \cos C}{\sin C} + \frac{c^2 \cos A}{\sin A} =$$

$$\frac{a^3\,c}{2\,S}\cos B + \frac{a^3\,b}{2\,S}\cos C + \frac{b\,c^3}{2\,S}\cos A =$$

$$\frac{1}{2\,S}(a^3\,c\cos B + a\,b^3\cos C + b\,c^3\cos A),$$

şi ţinând seamă că:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c},$$

avem:

$$a^2 \operatorname{cotg} B + b^2 \operatorname{cotg} C + c^2 \operatorname{cotg} A =$$

$$\frac{1}{4\,S}\left[a^2(a^2 + c^2 - b^2) + b^2(a^2 + b^2 - c^2) + \right.$$

$$\left. c^2(b^2 + c^2 - a^2)\right] = \frac{1}{4\,S}(a^4 + b^4 + c^4),$$

aşa că (3) devine:

$$2\,S = \lambda^2\left[\frac{a^4 + b^4 + c^4 + 8\,S^2}{4\,S}\right]$$

$$(4) \qquad \therefore\ \lambda^2 = \frac{16\,S^2}{16\,S^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}.$$

Dar din relaţia cunoscută:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

se deduce:

$$16\,S^2 = 2(a^2\,b^2 + b^2\,c^2 + c^2\,a^2) - (a^4 + b^4 + c^4),$$

aşa că (4) conduce la:

$$\lambda^2 = \frac{16\,S^2}{a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2\,b^2 + b^2\,c^2 + c^2\,a^2)} =$$

$$\frac{16\,S^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

$$(5) \qquad \therefore\ \lambda = \frac{4\,S}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Cu aceasta se poate trece la stabilirea relaţiunilor din enunţ.

Avem:

$$S = p\,r.$$

De unde ţinând seamă de (5):

$$4\,p\,r = 4\,S = \lambda(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$2\,r = \lambda\,\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} = \frac{\lambda^2\,a^2 + \lambda^2\,b^2 + \lambda^2\,c^2}{\lambda\,a + \lambda\,b + \lambda\,c} =$$

$$\frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{a' + b' + c'},$$

care este prima relaţiune. Pentru retaţiunea a doua plecăm dela:

$$S = (p - a)\, r_a$$

$$2\, r_a = \frac{\lambda\,(a^2 + b^2 + c^2)}{b + c - a} = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{b' + c' - a'}.$$

La fel se deduc şi formulele care dau pe r_b, r_c în funcţie de a', b', c'.

III. Să trecem acum la calculul elementelor lineare ale triunghiului ABC în funcţie de a', b', c'.

Din (5) se deduce:

$$\lambda = \frac{4\,\lambda^2\, S}{\lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 + \lambda^2 c^2} = \frac{4\, S'}{a'^2 + b'^2 + c'^2},$$

iar din (1) se scoate:

$$(6)\quad a = \frac{a'}{\lambda} = \frac{a'\,(a'^2 + b'^2 + c'^2}{4\, S'} = \frac{a'\,(a'^2 + b'^2 + c'^2)}{4\sqrt{p'\,(p' - a')\,(p' - b')\,(p' - c')}},$$

unde:

$$2\, p' = a' + b' + c'.$$

Formule analoage ne dau laturile b şi c.

Avem:

$$h_a = \frac{2\, S}{a} = \frac{2\,\lambda^2\, S}{\lambda^2\, a} = \frac{2\, S'}{\lambda\, a'},$$

sau ţinând seama de valoarea lui λ, găsim:

$$h_a = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{2\, a'}.$$

Pentru calculul lui R avem formula:

$$R = \frac{a\, b\, c}{4\, S} = \frac{a'\, b'\, c'\,(a'^2 + b'^2 + c'^2)}{16\, S'^2}.$$

Observaţiuni. 1. Au demonstrat pe căi analoage numai părţile I şi II a problemei d-nii: *Ionescu-Ţiu* (Craiova) şi *Sirchis I.* (Tighina).

2. D-l *Iancu David* (lic. Naţional, Iaşi) a demonstrat părţile I, II, ca şi în soluţia publicată mai sus, iar pe a, b, c le-a pus în funcţie de a', b', c' şi de $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

3. Un harnic corespondent dela Galaţi a găsit *că enunţul este greşit.*

4. Soluţia d-lor *Dimitriu* şi *Gheorghiu* nu este complectă în ce priveşte partea III căci nu dă toate elementele lineare ale triunghiului ABC în funcţie de a', b', c'.

Pentru complectarea solutiei părţei III a problemei a se vedea articolul *„Relaţiuni metrice între elementele unui triunghiu plan“* ce se publică în acest număr.

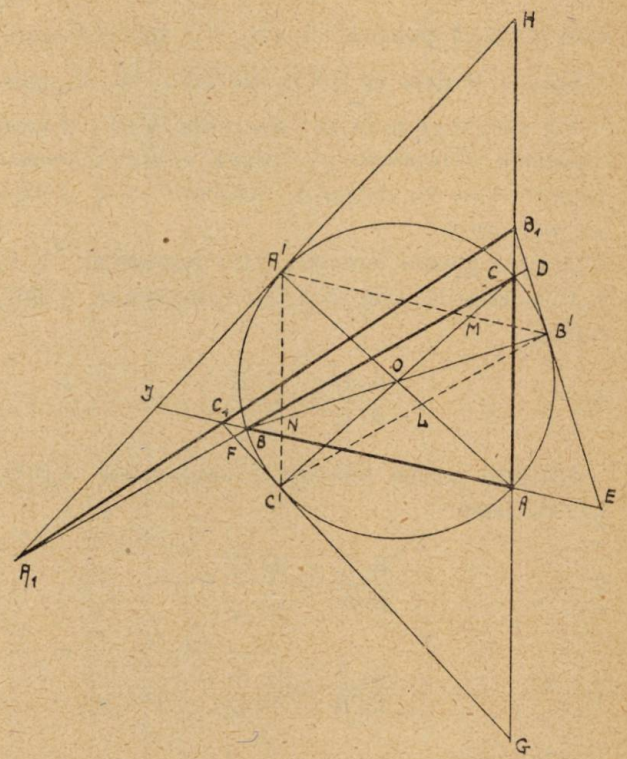
Gh. B.

724. — *Se consideră triunghiul* ABC *înscris în cercul de centru* O. *Să se arate că tangentele duse la acest cerc în punctele diametral opuse vârfurilor, întâlnesc laturile triunghiului respectiv în trei puncte colineare.*

N. G. Botea

Soluţia I dată de d-l *C. Coşniţă* (lic. Bârlad).

Fie A', B', C' punctele diametral opuse lui A, B, C. Tangentele în A', B', C' la O întâlnesc laturile triunghiului în A_1, B_1, C_1. Fie H. intersecţia lui $A'A_1$ cu AC; E intersecţia lui AB cu $B'B_1$; F intersecţia lui CB cu C_1C'; G intersecţia lui AC cu $C'C_1$ şi I intersecţia lui AB cu $A'A_1$.



Triunghiul ABC tăiat de transversalele A_1IH B_1DE şi C_1FG dă succesiv:

$$(1)\quad \frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{IB}{IA} \cdot \frac{HA}{HC} = 1$$

$$(2)\quad \frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{EB}{EA} = 1$$

$$(3)\quad \frac{C_1B}{C_1A} \cdot \frac{GA}{GC} \cdot \frac{FC}{FB} = 1.$$

Observ că triunghiurile dreptunghice $AA'H$, $CC'G$ sunt egale căci au catetele AA', CC' egale ca diametre a cercului O şi unghiurile ascuţite $\widehat{A'AH}$, $\widehat{C'CG}$ egale ca unghiuri, egale in triunghiul isoscel AOC, deci:

$$HA = GC. \tag{4}$$

La fel se arată că:

$$EB = IA;\ EA = IB;\ FC = DB;\ FB = DC. \tag{5}$$

Inmulţind membru cu membru egalităţile (1), (2), (3) şi ţinând seamă de (4) şi (5) se găseşte:

$$\frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} = 1$$

care arată că punctele A_1, B_1, C_1 sunt colineare.

Soluţia II dată de d-l *I. Murăroiu* (lic. Braşov).

Mă sprijin pe teorema: *tangenta în vârful unui triunghiu determină pe latura opusă segmente proporţionale cu patratele laturilor care pleacă din acel vârf.*

In baza acestei teoreme, între segmentele A_1B, A_1C şi laturile $A'B$, $A'C$ ale triunghiului $A'BC$, avem:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{\overline{A'B}^2}{\overline{A'C}^2}. \tag{5}$$

Aplicând aceiaşi teoremă triunghiurilor $AB'C$, $AC'B$, avem:

$$\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{\overline{B'C}^2}{\overline{B'A}^2} \tag{6}$$

$$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{\overline{C'A}^2}{\overline{C'B}^2}. \tag{7}$$

dar:

$$B'A = BA';\ C'A = CA';\ C'B = B'C, \tag{8}$$

ca fiind coarde ce se opun la unghiuri egale în O. Ţinând seamă de (8) şi înmulţind (5) cu (6) şi cu (7) regăsim rezultatul dela soluţia I.

Observaţiuni. 1. D-l *V. Arganini* (lic. Piteşti) a rezolvat problema bazându-se pe proprietatea că *dreptele care unesc vârfurile unui triunghiu cu punctele diametral opuse în cercul înscris triunghiului ale punctelor de tangenţă a acestui cerc cu laturile triunghiului,* sunt concurente.

D-l *V. Arganini* a enunţat, ca concluzie a acestei teoreme, o serie de proprietăţi interesante, pe care le-a extins şi la conice, dar pe care nu le-a demonstrat cu rigoarea matematică. Aşteptăm ca d-sa să reia acele proprietăţi, să le demonstreze riguros şi să ni le trimită sub formă de articol sau note. Le vom publica cu plăcere. Cerem însă figuri mai îngrijite şi mai clare.

2. D-nii *Iacob E.* (Sublocot. de artilerie), *Roman I.* (Bucureşti), *Sirchis I.* (lic. Tighina) şi *Vâlcianu I.* (lic. Tg.-Jiu) au trimis foarte bune soluţii analitice.

3. D-l *Drăguţ V.* (lic. Târgovişte) a demonstrat şi a generalizat problema cum se arată la observaţia următoare.

4. D-nii *Ghişoiu P.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti) şi *Stan A.* (lic. Milit., Iaşi) arată că problema 724 este un caz foarte particular al următoarei probleme generale, publicată în *Journal de Mathématiques Elémentaires*, pag. 85, din Martie 1925. *„Dacă prin vârfurile* A, B, C *ale unui triunghiu înscris într'o conică se duc 3 coarde concurente* AA', BB', CC', *tangentele în* A', B', C' *întâlnesc laturile triunghiului* ABC *în 3 puncte colineare".*

Iată soluţia dată în acea revistă. Fie L, M, N intersecţiile $(AA', B'C')$, $(CC', B'A')$, $(A'C', BB')$. Aplicăm teorema lui *Pascal* exagonului $BCC'A'A'B'$ care are 2 vârfuri confundate în A'. Conform acelei teoreme punctele $A_1(BC, A'A_1)$, $M(CC', A'B')$, $N(C'A', B'B)$ sunt colineare. La fel se arată prin consideraţia exagoanelor $CAA'B'B'C'$ şi $ABB'C'C'A'$ că LM trece prin B_1 şi LN trece prin C_1.

Triunghiurile ABC, LMN sunt omologice căci AL, BN, CM sunt concurente, deci punctele A_1, B_1, C_1 de întâlnire a laturilor lor sunt colineare.

5. D-nii *Mihai Gh.* (lic. Milit., Craiova), *Panaite T.* şi *Râmniceanu Cr.* (lic. Milit., Iaşi) au arătat că problema 724 este cazul particular al problemelor studiate de d-nii *N. Botea* şi *D. Nestor* în articolele intitulate *Generalizarea teoremei lui Aubert* şi publicate în R. M. T., vol. VI, respectiv la paginele 35 şi 100.

Atragem atenţia că nu este suficient să se comunice că problema e cunoscută şi să se indice locul unde se găseşte. Din aceasta corespondenţii nu trag folos destul. Ei trebue să se silească să dea soluţiuni diferite de acelea deja aflate de alţii, sau să găsească proprietăţi noi de ale figurei. Numai atunci dovedesc că s-au ocupat în mod serios cu acea problemă.

6. D-l *Marinaş M.* (Şc. Milit. de geniu) a arătat că problema este aceiaşi cu problema din *Foaia Matematică,* vol. III, pag. 79.

7. In fine s'au primit încă 5 soluţii neriguroase. Nu publicăm numele acestor rezolvitori.

Gh. B.

731. — *Fie patrulaterul* $ABCD$ *înscris în cercul* O *şi* V *un punct pe cerc. Dreptele lui Simson ale punctului* V *în raport cu triuughiurile* ABC, BCD, CDA, DAB *formează putrulaterul complect* $MNPRST$. *Să se demonstreze că:*

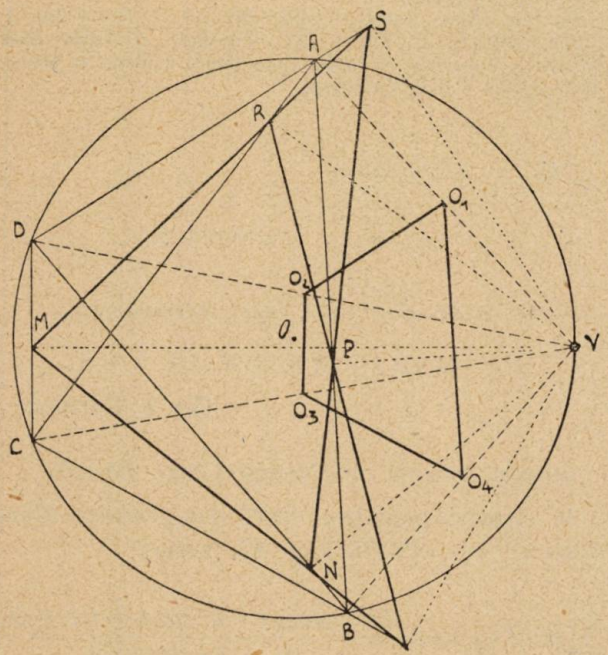
1°. Punctul lui Miquel al patrulaterului $MNPRST$ *este* V.

2°. Patrulaterul lui Miquel al patrulaterului $MNPRST$ *e direct omotetic cu* $ABCD$, *centrul de omotetie fiind* V *şi raportul de omotetie fiind* $\frac{1}{2}$.

I. C. VASILIU

Soluția dată de d-nii: *Aldea N.* (lic. M-rea Dealului), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Roman I.* (București), *Savin I.* (lic. Milit., Iași), *Sprinceană Gh.* (absolvent, Galați), *Stan A.* (lic. Milit., Iași) și *Ionescu-Țiu C.* (lic. Milit., Craiova).

Vârfurile M, N, P, R, S, T ale patrulaterului complect, format de cele trei drepte ale lui *Simson*, sunt tocmai proecțiile lui V respectiv pe CD, DB, BA, AC, DA, CB.



Punctul lui *Miquel* al patrulaterului MNPRST este punctul de întâlnire al cercurilor circumscrise triunghiurilor SRP, PNT, SMN și RMT.

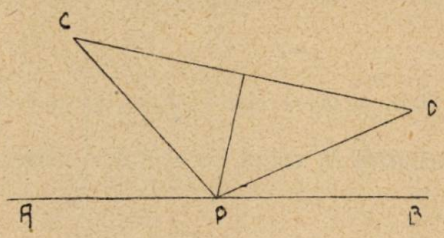
1°. Observăm că prin construcție unghiurile VSA, VRA, VPA sunt drepte, deci patrulaterul VSRP este înscris într'un cerc cu centrul O_1 în mijlocul lui lui NA. Cercul SRP trece deci prin V. Cercul PNT trece de asemeni prin V căci unghiurile VPB, VNB, VTB sunt drepte; centrul O_4 al acestui cerc este la mijlocul lui VC. La fel se arată că cercurile SMN, RMT trec prin V și au centrele O_2, O_3 respectiv la mijlocul lui VD și VC,

2°. Patrulaterul lui *Miquel* al patrulaterului MNPRST este patrulaterul cu vârfurile în O_1, O_2, O_3, O_4. Aceste puncte aflându-se la mijlocul dreptelor VA, VD, VC, VB, formează un patrulater asemenea cu ABCD raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$.

738. *Se dă o dreaptă oarecare* AB *și un punct exterior* C. *Să se găsească un punct* D, *astfel ca perpendiculara pe* CD *în mijlocul său, să taie pe* AB *într'un punct* P, *așa ca*, $\sphericalangle CPA = 2 \sphericalangle DPA$.

VASILE TARAS

Unim punctul C cu un punct oare are P de pe AB și împărțim $\sphericalangle CPA$ în două părți egale. Du-



cem apoi din P o dreaptă PE, de aceiași parte a lui AB ca și CP și astfel ca:

$$\sphericalangle BPE = \frac{\sphericalangle APC}{2}.$$

Pe PE luăm un punct D astfel ca:

$$PD = PC$$

D este punctul căutat, căci triunghiul CPD fiind isocel, perpendiculara pe CD în mijlocul său, trece prin vârful său P.

Fiecărui punct P, îi corespunde deci un punct D și astfel problema are o infinitate de soluții.

Soluții date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Băcicov P. Boris* (lic. Tighina), *Băcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Bratoșin Radu* (Brașov), *Coșniță Cesar* (Bârlad), *Dănciulescu Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Drăguț S. Vasile* (lic. Târgoviștea), *Gavrilescu V.* (lic. Brașov), *Gheorghieff N.* (Bolgrad), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru-Haret, București), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Militar, Craiova), *Marinaș Marin* (Șc. Milit. de Geniu), *Milea G. Ene* (lic. R.-Sărat), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Panțu Z. Ion* (București), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conduct. Cluj), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Militar, Iași), *Roman I. Ioan* (absolvent, București), *Savin C. Ioan* (lic. Militar, Iași), *Scarlat D.* (lic. Câmpina), *Scurtu G. Nicolae*, *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Silvian Emil* (lic. Lazar, București), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Stan I. Aurelian* (absolvent lic. Militar, Iași), *Țiucra Mircea* (lic Timișoara), și *Vâlceanu N. Iustin* (lic. Tg.-Jiu).

741*. — *Să se rezolve ecuația:*

$$x^3 - 3(m+1)x + (m+1)^2 = 0,$$

știind că:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3).$$

I. DIMITRIU-ARAD

Fie x_1, x_2, x_3, rădăcinele ecuației date. Să scrim suma patratelor și cuburilor lor în funcție de coeficienți:

$$(1)\quad \begin{aligned} \Sigma x_1^2 &= a_1^2 - 2a_2 = 6(m+1) \\ \Sigma x_1^3 &= -a_1^3 + 3a_1a_2 - 3a_3 = 3(m+1)^2, \end{aligned}$$

căci:

$$a_1 = 0,\ a_2 = -3(m+1),\ a_3 = (m+1)^2.$$

Relația dată în enunț, în virtutea relațiilor (1), devine:

$$6(m+1) = 3(m+1)^2.$$

De aci, deducem:

$$m+1 = 0 \quad \text{și} \quad m+1 = 2,$$

deci:

$$m = -1 \quad \text{și} \quad m = 1.$$

Pentru, $m = -1$, ecuația dată devine:

$$x^3 = 0,$$

care are o rădăcină triplă, $x = 0$.

Pentru, $m = 1$, avem ecuația:

$$x^3 - 6x + 4 = 0,$$

care anulându-se pentru $x = 2$, se descompune, astfel:

$$(x-2)(x^2 + 2x - 2) = 0.$$

Avem deci rădăcinele:

$$x_1 = 2,\ x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Soluții date de d-nii: *Almăjan Petru*, *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Cioclov Gheorghe* (bacalaureat), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Costăchescu V. C.tin* (Șc. Navală), *Dănciulescn Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova). *Dumitrescu Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Gane Vasile* (bacalaureat, București), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Iacob St Eugen* (Sublocot. de Artilerie), *Ionescu Gheorghe* (Caransebeș), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Levy Jacques* (lic. Matei-Basarab, București), *Licev Ion* (Șc. Polit, Timișoara), *Micula O.* (Șc. Polit., Timișoara), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Negrea A. Mircea* (absolvent, Brăila), *Panțu Z. Ion* (bacalaureat, București), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conduc., Cluj). *Petrovici D-tru* (lic. Câmpina), *Popescu P. Eugen* (absolvent), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (absolvent, București), *Saur Ioan* (lic. Arad), *Sassu V. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Scarlat D-tru* (lic. Câmpina), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Sirchis I.* (lic, Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (absolvent, lic. Galați). *Stan I. Aurelian* (lic. Milit. de Artilerie) și *Vâlceanu N, Justin* (lic. Tg.-Jiu).

Au mai trimes soluții, d-nii: *Bâcicov P. Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Bratoșin Radu* (Brașov), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați) și *Grossu Mircea* (lic. Carol, Craiova).

743. — *Dacă avem:*

$$\cos t = \frac{a}{2},\quad n = 6p + 5,$$

se cere să se elimine a, între polinoamele:

$$\Sigma a^{k-1} \sin kt = 0 \quad \text{și} \quad a^2 - a + 1 = 0.$$

GH. I. BALABAN

Soluție dată de d-l *Coșniță Cezar* (Bârlad).

In virtutea problemei 2872 din „*Gazeta Matematică*“, vol. XXXII, pag. 57, avem:

$$\sum_{k=1}^{n} a^{k-1} \sin kt = \frac{a^{n+1}\sin nt - a^n \sin(n+1)t + \sin t}{a^2 - 2a\cos t + 1}$$

și în baza faptului, că:

$$\cos t = \frac{a}{2},$$

avem:

$$\sum_{k=1}^{n} a^{k-1} \sin kt = a^{n+1}\sin nt - a^n \sin(n+1)t + \sin t.$$

Așa dar avem de eliminat pe a, între polinoamele:

$$(1)\quad \begin{cases} \sin nt \cdot a^{n+1} - \sin(n+1)t \cdot a^n + \sin t = 0 \\ a^2 - a + 1 = 0, \end{cases}$$

când $n = 6p + 5$.

In "G. M.", vol. XXXI, pag. 211, se stabilește, că eliminantul ecuațiilor:

$$\begin{cases} A\,a^{n+6} + B\,a^n + C = 0 \\ a^2 - a + 1 = 0, \end{cases}$$

când $n = 6p + 5$, este:

$$(A + B + C)^2 - B(A + B + C) + B^2 = 0.$$

In cazul nostru (1), rezultatul eliminării lui a, este:

$$[\sin t + \sin n\,t - \sin(n+1)\,t](\sin t + \sin n\,t) + \sin^2(n+1)\,t = 0.$$

Observare. S'au primit și câteva soluții greșite.

746. — *Să se demonstreze că într'un triunghiu oarecare:*

1°. Raza cercului circumscris este cuprinsă între a treia parte și a șeasa parte din perimetrul lui.

2°. Suma medianelor este cuprinsă între trei pătrimi și trei doimi din perimetrul lui.

GH. TH. GHEORGHIU

In ambele cazuri folosim următoarele teoreme cunoscute:

In orice triunghiu o latură este mai mică de cât suma celorlalte două.

Orice linie poligonală închisă este mai mică de cât altă linie poligonală închisă având aceleași extremități, ce o înconjoară.

1°. Unim O centrul cercului circumscris unui triunghiu A B C, cu vârfurile lui, putem deci scrie în triunghiurile B O C, C O A și A O B:

$$a < 2R < b + c$$
$$b < 2R < a + c$$
$$c < 2R < a + b.$$

Adunându-le și împărțind cu 6, avem:

$$\frac{a+b+c}{6} < R < \frac{a+b+c}{3}.$$

2°. Știm că medianele unui triunghiu se întâlnesc într'un punct G, situat la două treimi de vârf, și folosind teoremele de mai sus în triunghiurile B G C, C G A și A G B, avem:

$$a < \frac{2}{3}(m_b + m_c) < b + c$$
$$b < \frac{2}{3}(m_a + m_c) < a + c$$
$$c < \frac{2}{3}(m_a + m_b) < a + b.$$

Adunând aceste inegalități și împărțind cu $\frac{4}{3}$, avem:

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m^b + m_c < \frac{3}{2}(a+b+c).$$

Soluții date de d-nii: *Dumitrescu Nicolae* (Șc. Polit. Timișoara), *Coșnița Cesar* (Bârlad), *Cuțui I. Lucian*, *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Gheorghiev Nicolae* (Bolgrad), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru-Haret, Bucuresti), *Grossu Mircea* (llc. Carol, Craiova), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Militar, Iași), *Licev Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Micula O.* (Șc. Polit., Timișoara), *Murărăoiu I.* (lic. Brașov), *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila), *Panțu Z. Ion* (bacalaureat, București), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conduct., Cluj), *Petrovici D-tru* (lic. Câmpina), *Popescu D. Nicolae* (lic. Calafat), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Militar, Iași), *Roman I. Ioan* (absolvent, București), *Savin C. Ioan* (lic. Militar, Iași), *Scurtu A. Nicolae* (Brașov), *Stan I. Aurelian* (lic. Militar Iași), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara), *Vâlceanu N. Iustin* (lic. Tg.-Jiu) și *Vonica C. Ion* (lic. Tg.-Jiu).

Au mai trimes soluții, d-nii: *Bâcicov P. Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighină) și *Sirchis I.* (lic. Tighina).

749. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 56 \\ (x+y)(y+z)(z+x) = 10. \end{cases}$$

CEZAR COSNITA.

Ridicând prima ecuație la patrat și scăzând pe a 2-a, apoi împărțim cu 2 și avem:

$$xy + yz + zx = 44. \tag{1}$$

Ecuația 3-a se poate scri:

$$(xy + yz + zx + y^2)(z + x) = 480,$$

care în virtutea lui (1) și a primei ecuații a sistemului, devine:

$$(44 + y^2)(12 - y) = 480.$$

$$\therefore \quad y^3 - 12y^2 + 44y - 48 = 0, \tag{3}$$

sau:

$$(y-2)(y^2 - 10y + 24) = 0.$$

Rădăcinele ecuației (3) sunt deci:

2, 4, 6.

Cum sistemul dat este simetric în raport cu x, y, z urmează că și pentru x și z, obținem aceleași rădăcini.

Sistemul dat admite astfel următoarele 6 sisteme de soluții:

x	2	2	4	4	6	6
y	4	6	2	6	2	4
z	6	4	6	2	4	2

Soluții date de d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Carp Ignat* (Chișinau), *Chirilă Ioan* (lic. Militar, Iași), *Cioclov Gheorghe* (lic. T. Severin), *Ciupe Aëtius* (lic. Bistrița), *Cristescu C. Ion*, *Dânciulescu Gr. V.* (lic. Buzești), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Drinceanu A. Barbu* (lic. Calafat), *Gavrilescu V.* (lic. Brașov), *Gheorghiev Niculae* (Bolgrad), *Ghișoiu I. Petrică* (lic. Spiru-Haret, București), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Hamerak C.* (Caransebeș), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (absol. lic. Militar, Craiova), *Levy Jacques* (lic. Matei-Basarab, București), *Licev Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Micula O.* (Șc. Polit., Timișoara), *Mihalcea Emil* (Buzău), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Pantu Z. Ion* (bacalaureat, București), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Popescu O. Ion* (lic. Calafat), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Popescu D. Nicolae* (lic. Calafat), *Popescu C. Virgiliu* (Șc. Polit. Nancy), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Militar, Iași), *Roman I. Ioan* (absolvent, București), *Sabetey L. Andrei* (T.-Severin), *Sassu V. Ioan* (lic. Militar, Tg.-Mureș), *Savin C. Ioan* (lic. Militar, Iași), *Scarlat D.* (lic. Câmpina), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Stan I. Aurelian* (lic. Militar, Iași), *Șanr Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara) și *Vâlceanu N. Iustin* (lic. Tg. Jiu).

Au mai trimes soluții d-nii: *Bâcicov P. Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Bratoșin Radu* (Brașov), *Nicolae Grigore* (Șc. Milit. aeronautică) și *Sirchis I.* (lic. Tighina).

PROBLEME PROPUSE

780. — Să se găsească un patrat sau cub perfect de 4 cifre, a cărui rădăcină patrată sau cubică să fie un număr format din două din cifrele patratului sau ale cubului.

COL. GH. BUICLIU

781. — Se cere patratul perfect $a\,a\,b\,c\,c\,d$, în care suma cifrelor din mijloc dă numărul format de primele două cifre. Suma cifrelor de ordin impar întrece cu 4 unități pe acea a celor de ordin par.

MIRCEA GROSSU

782. — Se dă un patrulater complect. Să se construiască un paralelogram având câte un vârf pe fiecare latură, diagonalele fiind paralele cu două direcții date.

P. TROFIMOF

783. — Fie h_a'', h_b'', h_c'' segmentele de înălțimi cuprinse între ortocentru și laturi, într'un triunghiu A C B; k_a. k_b, k_c distanțele centrului cercului circumscris la laturi. Să se stabilească relațiile:

$$a\,h_a'' + b\,h_b'' + c\,h_c'' = 2\,s$$

$$a\,k_b\,k_c + b\,k_c\,k_n + c\,k_a\,k_b = R\,s,$$

celelalte notații fiind cele obicinuite.

I. MURAROIU

784. — Să se arate că expresia:

$$3\,x^8 + 2\,x^4(a^2 + a) + a^2,$$

este suma a trei patrate perfecte.

RAMNICEANU I. CRISTIAN

785. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (z + x - y)(x + y - z) = a\,x \\ (x + y - z)(y + z - x) = b\,y \\ (y + z - x)(z + x - y) = c\,z. \end{cases}$$

CEZAR COSNITA

786. — Să se formeze ecuația algebrică ale cărei rădăcini sunt:

$$x = \frac{1}{a + b \sin^2 \frac{k\pi}{n}}, \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n - 1).$$

V. ALACI

INFORMAȚIUNI

Recomandăm călduros corespondenților noștri, cartea „*Gândirea Matematică*“ a d-lui profesor universitar *Petre Sergescu*. (A se vedea la Bibliografie, 4).

——

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

——

Fie-care problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

——

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

——

Nu se pot lua în seamă pentru problemele de *Concurs*, de cât acelea sosite la timp și anunțate în revistă.

Problemele propuse de corespondenții înscriși la *Concurs*, se socotesc cu numărul de puncte corespunzător, ca oricărui rezolvător înscris pentru *Concurs*.

——

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

——

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri unmere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

——

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzători e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

Sucursala Timişoara

ANUL VIII. 15 FEBRUARIE 1929 NO. 12

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. COL GH. BUICLIU. TERTIANELE UNUI TRIUNGHIU
2. NOTE MATEMATICE, 27.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 725, 739, 745, 750.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** –profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.

ANUL VIII — NO. 12. TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1929

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

TERȚIANELE UNUI TRIUNGHIU

de COL. GH. BUICLIU

Fie un triungiu ABC și punctele A_b, A_c pe latura BC care împart această latură în trei părți egale.

Numesc *terțiană* a triunghiului ABC una din dreptele AA_b sau AA_c.

Nu cunosc această denumire și nici nu știu dacă segmentul AA_b sau AA_c are vre-o denumire în geometrie, rămân deci deocamdată la denumirea de *terțiană*.

In cele ce urmează voi indica un număr restrâns de proprietăți elementare ale terțianelor, sugerate de problema 739 rezolvată în acest număr la pagina 185.

Unui vârf A îi corespund două terțiane una AA_b și alta AA_c, pe prima o numesc adiacentă vârfului B și pe cealaltă adiacentă vârfului C. Observ că:

$$\frac{A_b B}{A_b C} = -\frac{1}{2}.$$

Fie A'_b simetricul lui C față de B. Avem:

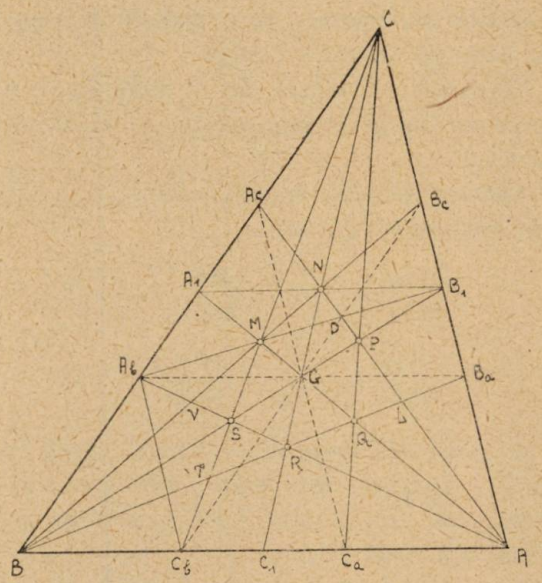
$$\frac{A'_b B}{A'_b C} = \frac{1}{2}.$$

Dreapta AA'_b o voi numi *terțiana exterioară* a lui A adiacentă lui B spre deosebire de AA_b, care este *terțiana interioară* a lui A adiacentă lui B. Vom avea și o terțiană exterioară AA'_c a lui A adiacentă lui C.

Mă voi ocupa numai de *terțianele interioare*.

1. *Terțianele interioare adiacente sau neadiacente unui vârf al triunghiului se întâlnesc pe mediana care pleacă din acel vârf.*

Trebue dovedit că BB_a, CC_a se întâlnesc într'un punct Q pe mediana AA_1, iar CC_b și BB_c se întâlnesc în M pe AA_1. Aceasta este tocmai proprietatea demonstrată în problema 739. Se poate demonstra la fel că AA_b, și CC_b se întâlnesc în S pe mediana BB_1, proprietate pe care o enunț și astfel:



2. *Terțianele interioare adiacente vârfului* B *se întâlnesc pe mediana ce pleacă din* B.

3. *Terțianele interioare care pleacă din vârful* A *trec prin mijloacele medianelor ce pleacă din celelalte vârfuri.*

Fie S intersecția (AA_b, BB_1) și N intersecția (AA_c, CC_1).

Teorema transversalelor, pentru triunghiul B_1BC tăiat de transversala ASA_b dă:

$$(1) \qquad \frac{SB}{SB_1} \cdot \frac{AB_1}{AC} \cdot \frac{A_b C}{A_b B} = 1,$$

dar:

$$\frac{AB_1}{AC} = \frac{1}{2} \text{ și } \frac{A_b C}{A_b B} = -\frac{2}{1},$$

așa că (1) conduce la:

$$\frac{SB}{SB_1} = -1,$$

ceiace demonstrează că AA_b trece prin mijlocul lui BB_1. La fel se arată că N este mijlocul lui CC_1 și Q mijlocul lui AA_1.

4. *Terțianele interioare ale unui triunghiu formează un exagon care are trei vârfuri pe laturile triunghiului median al triunghiului dat.*

Consider exagonul MNPQRS din figură. Am arătat la proprietatea precedentă că N este mijlocul lui CC_1 rezultă imediat că N se află pe A_1B_1, ceiace demonstrează proprietatea.

Q se află pe B_1C_1 și S pe A_1C_1.

5. *Să se calculeze valoarea rapoartelor segmentelor determinate de terțianele ce pleacă din un vârf, pe celelalte terțiane.*

Terțianele ce pleacă din A întâlnesc terțianele ce pleacă din B în punctele L, R, V, N indicate pe figură.

Aplicând teorema transversalelor, ca și în cazurile precedente, găsim:

$$\frac{LB}{LB_a} = -6; \quad \frac{RB}{RB_a} = -\frac{3}{2};$$

$$\frac{VB}{VB_c} = -\frac{3}{4}; \quad \frac{NB}{NB_c} = -3.$$

6. *Două din dreptele care unesc pe* B_1 *cu vârfurile exagonului* MNPQRS *trec prin picioarele medianelor triunghiului* ABC, *iar două prin picioarele a două terțiane.*

Am arătat la 4 că B_1, N, A_1 sunt colineare.

Voi arăta acum că B_1M trece prin A_b.

Se găsește ca la 5 că:

$$\frac{MB}{MB_c} = -\frac{3}{2},$$

și apoi este destul să se observe că:

$$\frac{MB}{MB_c} \cdot \frac{B_1B_c}{B_1C} \cdot \frac{A_bC}{A_bB} = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right) = 1,$$

deci B_1MA_b este transversală în triunghiul B_cBC

7. *Dreapta* C_aA_c *se întâlnește cu* A_1B_1 *și terțiana* CC_b *în un punct.* Se vede că C_a este mijlocul lui AC_b. Deci C_aA_c trece prin mijlocul terțianei CC_b, dar și A_1B_1 trece prin mijlocul acestei terțiane. Concluzia este că C_aA_c, C_1B_1, și terțiana AA_1 sunt concurente.

8. *Punctul* D *unde se întâlnesc dreptele* B_1A_b, B_cC_b *se află pe terțiana* AA_c.

Transversala B_1A_b din triunghiul AA_cC tae terțiana AA_c la 2 treimi dela vârf, dar și B_cC_b care e paralelă cu BC și trece prin G tae pe AA_c tot la 2 treimi dela vârf. Deci proprietatea e demonstrată.

Mă opresc aci. Continuând pe această cale se pot găsi numeroase proprietăți elementare de ale terțianelor, în special puncte colineare și drepte concurente- Las preocupărilor corespondenților noștri găsirea unora din acele proprietăți. Țin numai să atrag atențiunea și asupra relațiunilor metrice dintre terțiane și elementele triunghiului; relațiuni care pot duce la rezultate interesante. Iată de exemplu valorile terțianelor interioare care pleacă din vârful A:

$$AA_c = \frac{1}{3}\sqrt{6b^2 + 3c^2 - 2a^2}$$

$$AA_b = \frac{1}{3}\sqrt{3b^2 + 6c^2 - 2a^2},$$

formule care se apropie cu acelea care dau medianele în funcție de laturi.

Din aceste formule se scoate:

$$\overline{AA_c}^2 - \overline{AA_b}^2 = \frac{1}{3}(b^2 - c^2),$$

care conduce la proprietatea interesantă că *dacă vârfurile* B *și* C *ale unui triunghiu se află pe două cercuri concentrice în* A, *atunci diferența patratelor terțianelor, ce pleacă din* A, *este constantă și că terțianele care pleacă din* A *sunt egale numai dacă triunghiul este isoscel.*

NOTE MATEMATICE

27. *Asupra unor inegalități.* Ca o complectare a articolului care tratează aceiași chestiune și care mi s'a publicat în cuprinsul acestei reviste (No. 5, anul VIII), voi mai stabili, în nota de față, alte câteva inegalități. Mă voi servi, deci, de acelaș principiu ca și în articolul citat.

Fie: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n numere reale; avem:

$$\text{I}\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_{n-1} \geqq (n-1)\sqrt[n-1]{x_1 x_2 \ldots x_{x-1}} \\ x_2+x_3+\ldots+x_n \geqq (n-1)\sqrt[n-1]{x_2 x_3 \ldots x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n+x_1+\ldots+x_{n-2} \geqq (n-1)\sqrt[n-1]{x_n x_1 \ldots x_{n-2}} \end{cases}$$

Ridicăm aceste inegalităţi la puterea $(n-1)$ şi împărţindu-le, apoi, ambii membri respectiv prin:

$$(n-1)^{n-1}(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^{n-2}; \ldots$$

$$(n-1)^{n-1}(x_n+x_1+\ldots+x_{n-2})^{n-2},$$

avem:

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}{(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^{n-2}} \leqq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{(n-1)^{n-1}};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x_n x_1 \ldots x_{n-2}}{(x_n+x_1+\ldots+x_{n-2})^{n-2}} \leqq \frac{x_n+x_1+\ldots+x_{n-2}}{(n-1)^{n-1}}.$$

Adunându-le şi simplificând membrul al doilea cu $(n-1)$, obţinem inegalitatea:

$$(1)\ \frac{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}{(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^{n-2}} + \frac{x_2 x_3 \ldots x_{n-2}}{(x_2+x_3+\ldots+x_n)^{n-2}} + \ldots + \frac{x_n x_1 \ldots x_{n-2}}{(x_n+x_1+\ldots+x_{n-2})^{n-2}} \leqq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{(n-1)^{n-2}}.$$

Ridicăm la puterea $2(n-1)$ inegalităţile dela început şi adunând, obţinem:

$$\sum (x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^{2(n-1)} \geqq (n-1)^{2(n-1)} \sum x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n-1}^2.$$

Dar avem, evident:

$$(a)\quad x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n-1}^2 + x_2^2 x_3^2 \ldots x_n^2 + \ldots + x_n^2 x_1^2 \ldots x_{n-2}^2 \geqq x_1 x_2 \ldots x_n (x_1 x_2 \ldots x_{n-2} + \ldots + x_n x_1 \ldots x_{n-3}).$$

Adunând această inegalitate cu precedenta — după ce în prealabil am înmulţit-o pe a doua cu $(n-1)^{2(n-1)}$ — obţinem inegalitatea:

$$(2)\quad \sum (x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^{2(n-1)} \geqq (n-1)^{2(n-1)} x_1 x_2 \ldots x_n \sum x_1 x_2 \ldots x_{n-1}.$$

Dupăce am ridicat la puterea $(n-1)^{-a}$ aceleaşi inegalităţi, înmulţim pe prima, a doua, ... şi a n^a respectiv cu:

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1};\ x_3+x_3+\ldots+x_n;\ x_n+x_1+\ldots+x_{n-2},$$

şi adunând avem:

$$(2')\quad \sum (x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^n \geqq (n-1)^{n-1} \sum x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}).$$

Considerăm acum inegalităţile:

$$x_1^2 x_2 \ldots x_{n-1} + x_2^2 x_3 \ldots x_n + \ldots + x_n^2 x_1 \ldots x_{n-2} \geqq n x_1 x_2 \ldots x_n$$

$$x_1 x_2^2 \ldots x_{n-1} + x_2 x_3^2 \ldots x_n + \ldots + x_n x_1^2 \ldots x_{n-2} \geqq n x_1 x_2 \ldots x_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-1}^2 + x_2 x_3 \ldots x_n^2 + \ldots + x_n x_1 \ldots x_{n-2}^2 \geqq n x_1 x_2 \ldots x_n,$$

pe care adunându-le obţinem:

$$(b)\quad \sum x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}) \geqq n(n-1) x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Adunăm această inegalitate înmulţită cu $(n-1)^{n-1}$, cu $(2')$ şi avem inegalitatea:

$$(3)\ (x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^n + (x_2+x_3+\ldots+x_n)^n + \ldots + (x_n+x_1+\ldots+x_{n-2})^n \geqq n(n-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Această inegalitate generalizează inegalitatea (a_3) din articolul menţionat, precum şi generalizarea dată acesteia de d-l *Nicolae Zaharia* în No. 7, pag. 103.

Inmulţim între ele inegalităţile luate la început, şi avem:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})(x_2+x_3+\ldots+x_n)\ldots(x_n+x_1+\ldots+x_{n-2}) \geqq (n-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Insemnăm:

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1} = a_n$$

$$x_n+x_1+\ldots+x_{n-2} = a_{n-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_2+x_3+\ldots+x_n = a_1;$$

$$(S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Rezolvând acest sistem, găsim:

$$x_1 = \frac{S_n - (n-1)a_1}{n-1}; \quad x_2 = \frac{S_n - (n-1)a_2}{n-1}; \ldots$$

$$x_n = \frac{S_n - (n-1)a_n}{n-1}$$

şi înlocuind în inegalitatea precedentă, aceasta devine:

$$(4) \quad a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \geqq [S_n - (n-1)a_1][S_n - (n-1)a_2] \ldots [S_n - (n-1)a_n].$$

Să considerăm acum inegalităţile:

$$\text{II} \begin{cases} x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{n-1} \geqq (n-1)\, x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \\ x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1} \geqq (n-1)\, x_2 x_3 \ldots x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{n-1} + x_1^{n-1} + \ldots + x_{n-2}^{n-1} \geqq (n-1)\, x_n x_1 \ldots x_{n-2}. \end{cases}$$

Adunându-le, avem inegalitatea:

$$(5) \quad x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1} \geqq x_1 x_2 \ldots x_{n-1} + x_2 x_3 \ldots x_{n-1} + \ldots + x_n x_2 \ldots x_{n-2}.$$

Inmulţim pe prima prin: $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$; pe a doua prin: $x_2 + x_3 + \ldots + x_n \ldots$; adunând avem:

$$\sum (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{n-1}) \geqq (n-1) \sum x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}).$$

Adunăm această inegalitate înmulţită cu n, cu (b) şi obţinem:

$$(6) \quad \sum (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{n-1}) \geqq n(n-1)^2 x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Inmulţim tot inegalităţile din (II) respectiv cu:

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-1},\ x_2 x_3 \ldots x_n,\ \ldots x_n x_1 \ldots x_{n-2},$$

adunăm şi avem:

$$\sum x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{n-1}) \geqq (n-1) \sum x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n-1}^2,$$

adunând-o pe aceasta cu (a) înmulţită cu $(n-1)$, obţinem:

$$(7) \quad \sum x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{n-1}) \geqq (n-1)\, x_1 x_2 \ldots x_n \sum x_1 x_2 \ldots x_{n-2}.$$

Dacă înmulţim inegalitatea:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq n \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

respectiv cu fiecare din inegalităţile:

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1} \geqq n \sqrt[n]{x_1^{n-1} x_2^{n-1} \ldots x_n^{n-1}}$$

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} + x_2 x_3 + \ldots + x_n x_1 \ldots x_{n-2} \geqq n \sqrt[n]{x_1^{n-1} x_2^{n-1} \ldots x_n^{n-1}},$$

avem următoarele două inegalităţi, care se află în articolul citat însă deduse pe o cale mai laborioasă:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1}) \geqq n^2 x_1 x_2 \ldots x_n$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} + x_2 x_3 \ldots x_n + \ldots + x_n x_1 \ldots x_{n-2}) \geqq n^2 x_1 x_2 \ldots x_n.$$

In fine, inegalităţile din (I), ridicate la puterea $(n-1)$ şi adunate ne dau inegalitatea:

$$(8) \quad \sum (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})^{n-1} \geqq (n-1)^{n-1} \sum x_1 x_2 \ldots x_{n-1}.$$

Aplicaţii. Făcând $n = 3$ deducem din inegalităţile de mai sus diferite inegalităţi simple, unele cunoscute din culegerea de probleme.

Din (1) deducem inegalitatea:

$$\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 x_3}{x_2 + x_3} + \frac{x_3 x_1}{x_3 + x_1} \leqq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2},$$

din (2) deducem:

$$(x_1 + x_2)^4 + (x_2 + x_3)^4 + (x_3 + x_1)^4 \geqq 16\, x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3),$$

din (2′) şi (3) rezultă:

$$(x_1 + x_2)^3 + (x_2 + x_3)^3 + (x_3 + x_1)^3 \geqq 4[x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_2 x_3 (x_2 + x_3) + x_3 x_1 (x_3 + x_1)]$$

$$(x_1 + x_2)^3 + (x_2 + x_3)^3 + (x_3 + x_1)^3 \geqq 24\, x_1 x_2 x_3,$$

din (3′) rezultă:

$$8\, a_1 a_2 a_3 \leqq (a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_1)$$

Anuarul Soc. „Mat. Bârlădeană", 1927/28, pag. 40,

din (4) deducem:

$$a_1 a_2 a_3 \geqq (a_1 + a_2 - a_3)(a_2 + a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2)$$

(Culegere de prob., pag. 27),

din (5) deducem:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 \geqq x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$$

(C. d. p., pag. 27);

din (6) deducem:

$$(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)+(x_2^2+x_3)(x_2^2+x_3^2)+$$
$$(x_3+x_1)(x_3^2+x_1^2) \geqq 12\,x_1x_2x_3,$$

din (7) deducem:

$$x_1x_2(x_1^2+x_2^2)+x_2x_3(x_2^2+x_3^2)+x_3x_1(x_3^2+x_1^2) \geqq$$
$$2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3),$$

care se poate scrie, evident, şi sub una din formele:

$$x_3^3(x_1+x_2)+x_2^3(x_3+x_1)+x_1^3(x_2+x_3) \geqq$$
$$2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3),$$

$$x_3(x_1^3+x_2^3)+x_2(x_3^3+x_1^3)+x_1(x_2^3+x_3^3) \geqq$$
$$2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3),$$

$$(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2 \geqq$$
$$4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1).$$

CEZAR COSNITA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIV, No. 5, Ianuarie 1929. Soluţia generală a problemei 3372, de *Col. Gh. Buicliu*. Fluxul şi refluxul oceanelor (urmare), de *Ing. Al. Cehlarov*. † *NiculaeC. Segârceanu*, de *I. Ionescu*.

PROBLEME REZOLVATE

725*. — *Se dă triunghiul cu laturile:*

(B C) $y+2=0$

(C A) $x+y-7=0$

(A B) $5x-y+13=0$.

1. *Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului dat.*

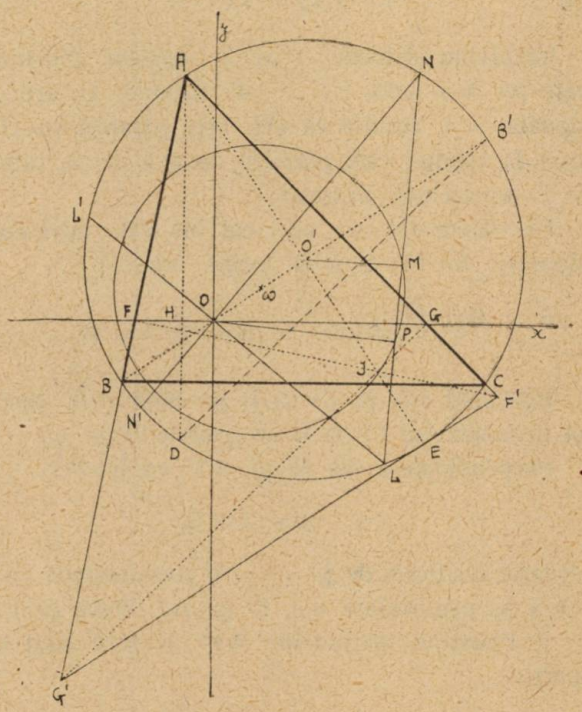
2. *Fie* D *şi* E *punctele unde înălţimea şi diametrul din vârful* A, *taie respectiv, pentru a doua oară cercul. Se ia pe cerc simetricul* B′ *a lui* B *faţă de centrul cercului. Să se arate că perpendiculara din* B′ *pe* C A, *trece prin* D.

3. *Prin ortocentrul* H *al triunghiului se duce paralela* F G *la latura* B C *a triunghiului. In* F *ridicăm o perpendiculară pe* A B, *care taie pe* A C *în* F′; *iar în* G *ridicăm o perpendiculară pe* A C, *care taie pe* A B *în* G′. *Să se arate că* F′ G′ *este tangentă la cerc în punctul* E.

4. *Prin origina axelor se duc două coarde,* O L *şi* O N, *perpendiculare între ele. Să se afle locul mijlocului coardei* L N.

5. *Să se afle locul proecţiei originei pe coarda* L N *şi să se explice rezultatul.*

I. DIMITRIU-ARAD



1. Rezolvind, două câte două sistemul ecuaţiilor laturilor se găseşte:

A (— 1, 8); B (— 3. — 2); C (9, — 2)

Ecuaţia generală a cercului ce trece prin 3 puncte este:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Inlocuind pe $x_2, y_1, x_2, y_2, \ldots$ prin coordonatele lui A, B, C şi dezoltând determinantul care rezultă, ce găseşte că ecuaţia cercului A B C este:

(1) $$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 39 = 0.$$

2. Ecuaţiunea înălţimei A H este:

$$x + 1 = 0.$$

Făcând în (1) pe x egal cu -1 găsim că ordonata lui D este -4. Deci D$(-1, -4)$. Fie O′ centrul cercului. Din (1) se deduce O′$(3, 2)$, deci dreapta A O′ are ecuaţia:

(2) $$3x + 2y - 13 = 0.$$

Rezolvind sistemul (1) şi (2) regăsim coordonatele lui A şi apoi E$(7, -4)$. Cum şi D are ordonata -4, rezultă că D E este paralelă cu B C, care la rându-i este paralelă cu axa de x, căci B şi C au aceleaşi ordonate.

De oarece O′ este mijlocul lui B B′, intre coordonatele lui O′, B şi B′ există relaţia:

$$\frac{B + B'}{2} = O' \quad \therefore \quad B' = 2O' - B.$$

Inlocuind aici pe O′ şi B pe rând prin abscisa şi ordonata lui O′ şi B se găseşte B′$(9, 6)$.

Perpendiculara din B′ pe A C va fi deci:

$$y - x + 3 = 0,$$

ecuaţie verificată de $(-1, -4)$ coordonatele lui D. Deci perpendiculara din B′ pe A C trece prin D.

3. Ecuaţiile înălţimelor A H şi B H sunt respectiv:

(A H) $x + 1 = 0$; (B H) $x - y + 1 = 0$.

de unde se deduce H$(-1, 0)$.

Deci H este pe axa O x.

Paralela F G dusă prin H la B C este chiar axa de x, deci:

$$y = 0,$$

ce taie pe A B în $F\left(-\frac{13}{5}, 0\right)$ şi G$(7, 0)$.

Perpendiculara F F′ pe A B are ecuaţia:

$$x + 5y + \frac{13}{5} = 0,$$

şi taie pe A C în $F'\left(\frac{47}{5}, -\frac{12}{5}\right)$, iar perpendiculara în G pe A C are ecuaţia:

$$x - y - 7 = 0,$$

şi taie pe A B în G′$(-5, -12)$. Urmează că dreapta F′ G′ are ecuaţia:

(3) $$2x - 3y - 26 = 0.$$

Ecuaţia tangentei în punctul E$(7, -4)$ la cerc se găseşte că este identică cu (3), în adevăr ea este:

$$7x - 4y - 3(x + 7) - 2(y - 4) - 39 = 0$$

$$\therefore \quad 2x - 3y - 26 = 0.$$

4. Fie L(x', y') şi N(x'', y''). De oarece O L $\perp$ O N avem:

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{x''}{y''}$$

(4) $$\therefore \quad x'x'' + y'y'' = 0.$$

Cum L şi N sunt pe cerc, satisfac ecuaţia (1)‘ deci:

(5) $$x'^2 + y'^2 - 6x' - 4y' - 39 = 0$$

(6) $$x''^2 + y''^2 - 6x'' - 4y'' - 39 = 0.$$

Mijlocul lui L N va fi:

(7) $$x = \frac{x' + x''}{2}, \qquad (8) \quad y = \frac{y' + y''}{2}.$$

Eliminând x', x'', y' y'' între (4), (5), (6), (7), (8) se găseşte locul cerut la 4. Adun (5) cu (6) şi am:

$$x'^2 + x''^2 + y'^2 + y''^2 - 6(x' + x'') - 4(y' + y'') - 78 = 0$$

dar:

$$x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 4x^2 - 2x'x''$$

$$y'^2 + y''^2 = (y' + y'')^2 - 2y'y'' = 4y^2 - 2y'y''$$

rezultă că avem:

$$4x^2 - 2x'x'' + 4y^2 - 2y'y'' - 12x - 8y - 78 = 0$$

ţinând seamă de (4):

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - \frac{39}{2} = 0,$$

adică un cerc cu centrul în $\omega\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ şi cu raza dată de:

$$4r^2 = 89.$$

5. In triunghiul dreptunghic L O N avem:

$$\overline{PO}^2 = PN \cdot PL = (R + O'P)(R - O'P)$$

$$\therefore \quad \overline{PO}^2 = R^2 - \overline{OP'}^2$$

$$\therefore, \quad \overline{PO}^2 + \overline{PO'}^2 = R^2.$$

Fie $P(x, y)$. Avem, înlocuind lungimele în funcție de coordonate:

$$x^2 + y^2 + (x-3)^2 + (y-2)^2 = 52$$

căci R, raza lui O' este $\sqrt{52}$.

Ecuația precedentă devine, după reducerea termenilor asemeni:

$$x^2 + y^2 - 3x - 3y - \frac{39}{2} = 0,$$

adică ecuația cercului ω dela 4. Punctul P descrie deci tot cercul ω. Explicația este în proprietatea de care se bucură un patrulater ortodiagonal și care este enunțată la punctul 2 al observațiunilor ce urmează.

Observațiuni. 1. Au dat foarte bune soluțiuni analitice tuturor celor 5 părți ale problemei, d-nii: *Dănciulescu V.* (lic. Buzești, Craiova), *Micula O.* (Timișoara) și *Sprinceană Gh.* (lic. Galați).

2. Au dat foarte bune soluțiuni analitice primelor 4 părți d-nii: *Ghișoiu P.* (lic. Spiru Haret, București), *Ionescu-Țiu D. C.* (lic. Milit., Craiova) și *Roman I.* (absolvent, București).

D-lor au rezolvat partea 5 pe cale geometrică utilizând rezultatele din Gazeta Matematică, vol. XXXI, pag. 328, unde se demonstrează că *într'un patrulater ortodiagonal* L M L' M', *mijloacele laturilor și proecțiile pe aceste laturi ale punctului de întâlnire al diagonalelor sunt 8 puncte pe un același cerc* ω.

3. Au rezolvat analitic dând rezultate exacte numai pentru primele 3 părți ale problemei, d-nii: *Panțu I.* (bacalaureat, București), *Patega I.* (Tg.-Jiu), *Scurtu N.* (Brașov). *Sirchis G.* (lic, Tighina) și un anonim.

4. D-l *Savin I.* (lic. Milit., Iași), a dat o bună soluție geometrică pentru punctele 4 și 5. Soluțiile geometrice trimise de d-sa pentru punctele 2 și 3 nu sunt riguroase și se bazează pe afirmațiuni ca *„B' este omoteticul lui B față de A"*.

5. Soluție geometrică parțială s'a primit și dela d-l *Saur I.* (Arad).

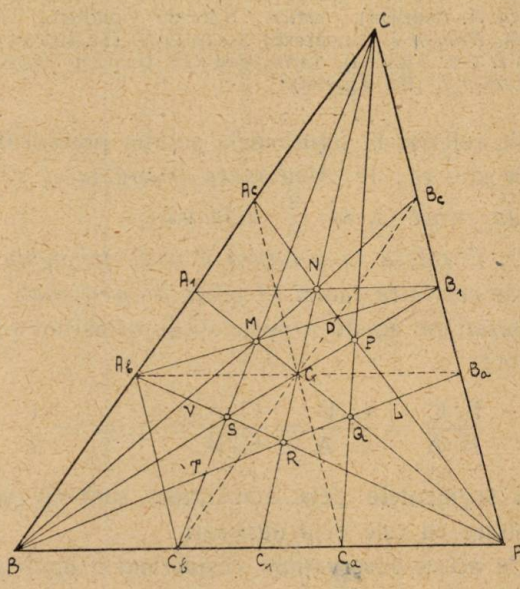
6. Celelalte soluțiuni primite conțin erori prea mari pentru a fi menționate.

Vom publica cu plăcere soluția geometrică complectă a ultimelor 5 puncte îndată ce o vom primi dela unul din corepondenții noștri.

8. Trebue observat că F F', G G', A O' concură într'un punct I ca înălțimi ale triunghiului F' A G', dar I nu se găsește neapărat pe cercul ω, cum pare din figură.

739. — *Se consideră un triunghiu oarecare* A B C. *Prin G, centrul său de greutate se duc paralele la* A B, B C *și* C A. *Se obțin astfel punctele* B_a, A_b; C_b, B_c; A_c, C_a *pe laturile triunghiului. Dacă* A_1, B_1, C_1 *sunt picioarele medianelor lui* A B C, *să se arate că grupurile de ceviene:* (AA_1, CC_b, BB_c), (BB_1, CC_a, AA_c), (CC_1, AA_b, BB_a), (AA_1, BB_a, CC_a), (BB_1, CC_b, AA_b), (CC_1, BB_c, AA_c) *sunt concurente.*

CEZAR COSNITA.



Soluția I, dată de d-nii: *Savin I.* (lic. Milit., Iași), și *Stan A.* (Școala militară de Artilerie, Timișoara.

Considerăm figura BC_bB_cC. De oarece B_cC_b trece prin G și e paralelă cu BC figura BC_bB_cC este un trapez în care GA_1 unește mijloacele G, A_1 ale laturilor paralele. Se știe însă că linia care unește mijloacele laturilor paralele ale unui trapez, trece prin punctul de întâlnire al diagonalelor. Urmează că diagonalele CC_b, BB_c ale trapezului considerat se întâlnesc pe AA_1.

La fel se arată că AA_c, CC_a se întâlnesc pe BB_1 și că BB_a, AA_b se întâlnesc pe CC_1 prin considerarea trapezelor AC_aA_cC și AB_aA_bB.

Observăm apoi că de oarece G împarte pe AA_1 în segmente al căror raport este cunoscut iar B_cC_b și A_bB_a sunt respectiv paralele cu BC și AB avem:

$$\frac{C_bB}{AB} = \frac{GA_1}{AA_1} = \frac{1}{3} = \frac{A_bB}{CB},$$

de unde urmează că A_bC_b este paralelă cu AC, deci AC_bA_bC este un trapez, iar CC_b, AA_b se

taie pe BB_1. La fel se arată că BB_a, CC_a se taie pe AA_1 şi că BB_c, AA_c se întâlnesc pe CC_1.

Soluţia II, dată de d-nii: *Aldea N.* (lic. Milit., M-rea Dealul), *Bâcicov B.*, *Bâcicov V.* (lic. Tighina), *Costăchescu V. C.* (Şc. navală), *Dănciulescu V.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dobromirescu P.* (lic. Caracal), *Drăguţ G. Vasile* (lic. Târgovişte), *Gheorghe M.* (Şc. Milit., Craiova), *Gheorghiev N.* (Bolgrad), *Ghişoiu P.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ionescu-Ţiu C.* (lic. Milit., Craiova), *Micula O.* (Timişoara), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila), *Pârvu A.* (student), *Petrică I.* (Şc. de Conduct., Tecnici, Cluj), *Roman I.* (Bucureşti) *Secăroiu D.* (lic. Braşov), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gh.* (Galaţi), *Vâlceanu I,* şi *Vonica I.* (lic. Tg.-Jiu).

Ne referim la figura dela soluţia precedentă.

Se ştie că: 1°. *Medianele triunghiului se taie în un punct* G, *la* $\frac{2}{3}$ *dela vârf.*

2°. *Paralela la o latură a unui triunghiu împarte celelalte laturi în părţi proporţionale.*

Bazaţi pe aceste proprietăţi şi urmărind figura, avem:

$$\frac{B_c C}{B_c \hat{A}} = \frac{C_b B}{C_b A} = \frac{C_a A}{C_a B} = \ldots = -\frac{1}{2}$$

căci segmentele dela numărători sunt de semne contrare cu cele dela numitori.

Cu aceste observaţiuni, cosiderând grupul (AA_1, BB_a, CC_a), observăm că:

$$\frac{A_1 B}{A_1 C} \cdot \frac{B_a C}{B_a A} \cdot \frac{C_a A}{C_a B} = \left(-1\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

relaţiune care arată, conform teoremei lui *Ceva*, că dreptele AA_1, BB_a, CC_a sunt concurente.

La fel se demonstrează şi concurenţa dreptelor din celelatte grupuri.

Observaţiuni. 1. D-l *Murăroiu I.* a arătat că în general, dacă pe laturile triunghiului se iau punctele A_b, A_c, B_a; B_c, C_b, C_a astfel în cât:

$$\frac{A_b B}{A_b C} = \frac{B_a A}{B_a C} = \frac{B_c C}{B_c A} = \frac{C_b B}{C_b A} = \frac{C_a A}{C_a B} = \frac{A_c C}{A_c B} = -\frac{m}{n}$$

A_1, B_1, C_1 fiind mijloacele laturilor, atunci cele 6 grupuri de drepte din enunţ sunt concurente.

2. D-nii *Panţu I.* (Bucureşti) şi *Râmniceanu C.* (lic. Milit., Iaşi) au notat prin C_b, B_c puncte de pe BC şi atunci grupa AA_1, BC_b, CB_c se reduc la dreptele AA_1 şi BC. Analog şi cu celelalte grupe. Ori această interpretare nu prezintă nici un interes, şi cei doi corespondenţi trebuiau să cerce şi alte notaţii pentru a găsi o problemă cu senz, aşa cum a fost problema 739.

745*. — *Să se găsească 2 patrate consecutive de câte 6 cifre ştiind că unul din ele începe cu numărul de 3 cifre cu care se termină celalt şi că cele 2 cifre dela mijlocul unuia din patratele căutate sunt egale cu 9.*

COL. GH. BUICLIU

Fie N^2 şi M^2 cele 2 patrate căutate. Conform enunţului trebue să avem:

(I) $\quad N^2 = ab99cd$ şi $M^2 = 9cdxyz$

sau:

(II) $\quad N^2 = ab99cd$ şi $M^2 = xyzab9$,

în care a, b, c, d, x, y, z sunt cifre, din care unele pot fi egale cu zero.

Se deosebesc deci dela început 2 cazuri.

Cazul I. este cazul egalităţilor I. De oarece M^2 începe cu 9, avem:

$$900000 < M^2 < 999999$$

(1) $\quad \therefore \sqrt{900000} = 948{,}6 < M < \sqrt{999999} = 999{,}..$

N şi M fiind consecutive şi M trebuind să satisfacă neegalităţilor (1) urmează că şi N va trebui să satisfacă neegalităţilor:

(2) $\quad 948 < N < 999$

deci şi N începe cu 9 şi cum limita inferioară:

$$948^2 = 898704,$$

nu are cifrele dela mijloc egale cu 9 urmează că:

$$948 < N \quad \therefore \quad 948^2 < N^2,$$

deci N^2 începe cu 9, deci $a = 9$.

Tabloul publicat în *Gazeta Matematică*, vol. XXXIII, pag. 138 dă ultimele 3 cifre ale terminaţiei unui patrat perfect. Se ia din acele terminaţiuni numai pe acelea care au cifra miilor egală cu 9, aşa cum este a lui N^2, şi se găseşte că $9cd$ ar putea avea una din următoarele 15 valori:

(3)
$$\begin{cases} 900\,;\ 904\,;\ 916\,;\ 921\,;\ 924\,; \\ 929\,;\ 936\,;\ 944\,;\ 956\,;\ 961\,; \\ 964\,;\ 969\,;\ 976\,;\ 984\,;\ 996. \end{cases}$$

Observ că $9cd$ nu poate fi egal cu 900 pentru că din:

$$N^2 = ab9900,$$

ar rezulta că $a\,b\,99$ să fie patrat perfect, ceiace nu se poate judecând numai după terminaţiunea 99.

Dăm deci lui $9\,c\,d$ pe rând celelalte 14 valori ale şirului (3).

Fie: $9\,c\,d = 904$

$$\therefore\ N^2 = 9\,b\,9904 \quad \therefore\ N = \begin{cases} 9\,n\,2 \\ 9\,n\,8. \end{cases}$$

Caut valoarea lui n pentru care $(9\,n\,2)^2$ se termină cu 04 aşa cum se termină N^2. Pentru aceasta voi imita regulile calculului numeric, după metoda recomandată în articoiul *„Rezolvarea problemelor de aritmetică prin imitarea calculelor numerice“* de d-l *I. Ionescu,* publicat în *R. M. T.*, vol. I, pag. 115. Iată operaţiile aritmetice de ridicare la pătrat a numărului $9\,n\,2$:

$$\begin{array}{r} 9\,n\,2 \\ 9\,n\,2 \\ \hline \ldots(2n)\,4 \\ \ldots(2n) \\ \ldots 8 \\ \hline \ldots(4n)\,4 \end{array}$$

Cifra zecilor lui $(9\,n\,2)^2$ este dată de cifra unimilor lui $4\,n$ şi pentruca această cifră să fie zero trebue ca n să fie zero sau 5, şi cum N începe cu 9 el ar putea fi:

902 sau 952,

dar 902 este în afara limitelor stabilite la (2) iar:

$$952^2 = 906304,$$

nu răspunde la condiţia de a avea cele 2 cifre dela mijloc egale cu 9.

Nu este nevoe de a se calcula 952^2 complect, este destul de a-i calcula cifra miilor după metoda precedentă.

Se examinează la fel numărul $9\,n\,8$ corespunzător terminaţiunei 904 şi apoi se continuă pe aceiaşi cale pentru toate terminaţiunile din şirul (3). Rezultatele calculelor şi încercărilor făcute sunt cuprinse în următorul tabel în care m din coloana II reprezintă valoarea unităţilor lui N:

Valorile găsite pentru			Valorile pe cari le-ar putea lua	
$9\,c\,d$	m	n	N	N^2
904	2	0	902	—
		5	952	906304
	8	4	948	—
		9	998	996004
916	4	0	904	—
		5	954	910116
	6	4	946	—
		9	996	992016
921	1	1	911	—
		6	961	923521
	9	3	939	—
		8	989	978121
924	2	3	932	—
		8	982	964324
	8	1	918	—
		6	968	956484
929	3	2	923	—
		7	973	946729
	7	2	927	—
		7	977	954529
936	4	4	944	—
		9	994	988036
	6	0	906	—
		3	956	913956
944	2	1	912	—
		6	962	925444
	8	3	938	—
		8	988	976144
956	4	3	934	—
		8	984	968256
	6	1	916	—
		6	966	933156
961	1	3	931	—
		8	981	962361
	9	1	919	—
		6	969	938961
964	2	4	942	—
		9	992	984064
	8	0	908	—
		5	958	917764

969	3	1	913	—
		6	963	927369
	7	3	937	—
		8	987	974169
976	4	2	924	—
		7	974	948676
	6	2	926	—
		7	976	952576
984	2	2	922	—
		7	972	944784
	8	2	928	—
		7	978	956484
996	4	1	914	—
		6	964	929296
	6	3	936	—
		8	986	972196

Din examinarea acestui tabel, se vede că în cazul I problema nu are soluţie.

Cazul II corespunde egalităţilor:

$$N^2 = ab99cd, \quad M^2 = xyzab9.$$

Ultima cifra a lui M^2 arată că M nu poate fi de cât de una din formele:

$$mn3 \quad \text{sau} \quad mn7.$$

Cum M şi N sunt consecutive urmează că:

$$\text{Pentru } M = mn3 \quad \text{avem} \quad N = \begin{cases} mn2 \\ \text{sau} \\ mn4 \end{cases}$$

$$\text{Pentru } M = mn7 \quad \text{avem} \quad N = \begin{cases} mn6 \\ \text{sau} \\ mn8 \end{cases}$$

de unde se deduce că N^2 se termină numai cu 4 sau cu 6. Urmează că $9cd$ va avea numai valorile terminate în 4 sau 6 în şirul (3) dela cazul I. Vom examina deci pe rând acele cazuri utilizând rezultatele găsite în coloana 3 a valorilor lui n în tabloul precedent.

Fie $9cd = 904$ şi $N = mn2$.

Tabelul precedent dă pentru n valorile 0 sau 5. Rămâne acum să determin pe m aşa că N^2 să aibă cifra miilor egală cu 9. Procedez prin metoda calculului aritmetic ca şi în cazul I, şi avem:

$$\begin{array}{r} m\,02 \\ m\,02 \\ \hline 2\,m\,04 \\ 2\,m \\ \hline (4\,m)04 \end{array} \qquad \text{sau} \qquad \begin{array}{r} m\,52 \\ m\,52 \\ \hline (2\,m+1)\,04 \\ 6\;0 \\ \hline (2\,m) \\ \hline \ldots(4\,m+7)\,04 \end{array}$$

Cifra miilor lui $(m\,02)^2$ va fi cifra unităţilor lui $4\,m$. Dar $4\,m$ nu se termină niciodată cu 9, deci $(m\,02)^2$ nu poate da soluţie.

La fel, cifra miilor lui $(m\,52)^2$ va fi egală cu cifra unităţilor lui $(4\,m+7)$ şi această cifră va fi 9 când $4\,m$ se va termina cu 2 adică atunci când m va fi 3 sau 8. Deci N ar putea fi:

$$N = 352 \quad \text{sau} \quad N = 852,$$

iar pentru M am avea valorile 353, 853. Insă:

$$352^2 = 123904 \qquad 852^2 = 725904$$
$$353^2 = 124609 \qquad 853^2 = 727609$$

nu sunt soluţii.

Procedând absolut la fel pentru celelalte 10 valori ale lui $9cd$, terminate cu 4 sau 6, din şirul (3) găsim rezultatele cuprinse în următorul tabel:

Valorile pe care le poate avea				
$9cd$	N	M	N^2	M^2
904	352	353	123904	124609
	852	853	725904	727609
	148	147	021904	21609
	648	647	419904	418609
916	054	053	002916	002809
	554	553	306916	305809
	446	447	198916	199809
	946	947	894916	896809
924	382	383	145924	146689
	882	883	777924	779689
	118	117	013924	013689
	618	617	381924	380639
936	044	043	001936	001849
	544	543	295936	294849
	456	457	207936	208849
	956	957	913936	915849
944	212	213	044944	045369
	712	713	506944	508369
	288	287	082944	082369
	788	787	620944	619369

956	134	133	017956	017689
	634	633	401956	400689
	366	367	133956	134689
	866	867	749956	751689
964	342	343	116964	117649
	842	843	788964	710649
	158	157	024964	024649
	658	657	432964	431649
976	324	323	104976	104329
	824	823	678976	677329
	176	177	030976	031329
	676	677	456976	458329
984	272	273	073984	074529
	772	773	595984	597529
	228	227	051984	051529
	728	727	529984	528529
996	114	113	012996	012769
	614	613	376996	375769
	386	387	148996	149769
	886	887	784996	786764

Se vede din acest tabel că singura soluție a problemei este dată de numerele:

$$728^2 = 529984\ ;\ 727^2 = 528529.$$

Este de remarcat în ultimul tabel că pentru fiecare valoare a lui $9\,c\,d$, M^2 se termină cu același număr de 3 cifre. Deci nu este neapărat nevoe ca pentru un $9\,cd$, să se înscrie toate valorile lui M^2 în ultima coloană, mai ales dacă nu se dispune de o tablă de patrate perfecte ci este suficient să se calculeze M^2 corespunzător câte uneia din valorile lui N pentru un $9\,c\,d$ dat.

Dacă nu se dispune de tabele de patrate perfecte problema necesită 28 de ridicări la patrat pentru cazul I și 53 pentru cazul II.

Observațiuni. 1. După cum se vede din soluțiunea dată, problema 735 comportă multe operațiuni de ridicări la patrat. Dintre corespondenții care au trimis soluțiunea problemei unii au făcut aceste încercari, unul a enunțat doar soluția găsită în o tablă de patrate. Căutarea în table numerice nu intră în sistemul de rezolvare al problemelor, această căutare poate servi cel mult ca verificare.

2. D-l *Coșniță C.* (Bârlad) a rezolvat foarte bine problema în felul următor:

Pentru cazul I a căutat toate patratele care încep cu numerele șirului (3) și apoi a format patratele consecutive (în plus și ,n minus) acestora.

Pentru cazul II a format numerele $x\,y\,z\,a\,b\,9$ în care $a\,b\,9$ sunt terminațiunile în 9 ale patratelor perfecte, stabilite în *Gazeta Matematică*, apoi cu $a\,b$ astfel găsit a format toate patratele $a\,b\,99\,c\,d$ în care $c\,d$ este terminația patratelor care au pe 9 ca cifra a miilor. Eliminând prin diferite criterii, din aceste numere pe acelea "ce nu sunt patrate perfecte ajunge la soluția problemei.

3. Au rezolvat problema prin diferite încercări d-nii: *Cristescu-Potlogi C. I.*, *Drăguț V.* (lic. Târgoviște), *Magda Ovidiu* (Cluj), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Panțu I.* (București), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Savin I.* (lic. Milit., Iași), *Scarlat D.* (lic. Câmpina), *Stan Aurelian* (Șc. milit. Artilerie, Timișoara) și *Vâlceanu I.* (absolvent, lic. Tg.-Jiu).

4. Celelalte soluții primite nu sunt acceptabile.

Gh. B.

750. — *Să considerăm polinoamele:*

$$\varphi_1(x) = x^8 = 28\,x^6 - 70\,x^4 + 28\,x^2$$

$$\varphi_2(x) = x^6 - 7\,x^4 + 7\,x^2 - 1.$$

Să se rezolve ecuația:

$$\varphi_1(x) - 8\,i\,x\,\varphi_2(x) - 1 = 0, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

GH. V NICOLAU

Inlocuind în ecuație valorile lui $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x$ avem:

$$x^8 - 8\,i\,x^7 + 28\,x^6 + 56\,i\,x^5 - 70\,x^4 - 56\,i\,x^3 + 28\,x^2 + 8\,i\,x - 1 = 0,$$

sau încă:

$$2\,x^8 - (x^8 + C_8'\,x^7\,i + C_8^2\,x^6\,i^2 + C_8^3\,x^5\,i^3 + C_8^4\,x^4\,i^4 + C_8^5\,x^3\,i^5 + C_8^6\,x^2\,i^6 + C_8^7\,x\,i^7 + i^8) = 0.$$

De aci deducem:

$$2\,x^8 - (x + i)^8 = 0$$

$$\therefore \quad \left(\frac{x+i}{\sqrt[8]{2}\,x}\right)^8 = 1 = \cos 2\,k\,\pi + i \sin 2\,k\,\pi,$$

sau:

$$\frac{x+i}{\sqrt[8]{2}\,.\,x} = \cos\frac{k\,\pi}{4} + i \sin\frac{k\,\pi}{4}, \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots 7).$$

Rezolvând în raport cu x, găsim:

$$x = \frac{i}{\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{h\,\pi}{4} + i \sin\frac{k\,\pi}{4}\right) - 1}, \quad (k = 0, 1, 2, .. 7).$$

Rezultă, că ecuaţia dată are următoarele 8 rădăcini:

$$x_1 = \frac{i}{\sqrt[8]{2}-1},\quad x_2 = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt[8]{2}(1+i)-\sqrt{2}},$$

$$x_3 = \frac{i}{i\sqrt[8]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[8]{2}+i},\quad x_4 = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt[8]{2}(i-1)-\sqrt{2}},$$

$$x_5 = -\frac{i}{1+\sqrt[8]{2}},\quad x_6 = -\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt[8]{2}(1+i)+1}$$

$$x_7 = \frac{1}{i-\sqrt[8]{2}},\quad x_8 = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt[8]{2}(1-i)-1}.$$

Soluţii date de d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (absolvent, Craiova), *Petrică I. Ioan* (Şc. de Conductori, Cluj), *Roman I. Ioan* (Şc. Polit., Bucureşti),

PROBLEME PROPUSE

787. — Să se găsească un patrat perfect $abcde$, astfel ca $edcba$ să fie acelaş patrat perfect.

SUBLOCOT. EUGEN ST. IACOB

788. — Se scrie patratul unui număr m de o cifră, apoi două cifre a şi b şi în fine, $(m+10)^2$. Se obţine astfel un patrat perfect. Se cere acest patrat, ştiind că:

$$a \times b = m^2 - 1.$$

NIC. PAVEL-ORIZABA

789. — Fie M un punct in planul unui triunghiu ABC. Se cere să se găsească viciul următoarei demonstraţiuni:

„Din triunghiurile AMC *şi* ABC *se deduce:*

$$AC - MC < AM$$

$$AC - AB < BC,$$

Scăzând aceste inegalităţi membru din membru, se găseşte:

$$AB - MC < AM - BC,$$

de unde zezultă:

(1) $$AB + BC < AM + MC".$$

COL. GH. BUICLIU

790. — Se dă patratul ABCD de latară a, ale cărui diagonale se taie în O. Pe aceste diagonale se duc perpendiculare respectiv în punctele C şi D, pe care se iau lungimele:

$$CE = DF = 3CO.$$

1. Să se demonstreze că diagonalele trapezului ABFE se întâlnesc în centrul de greutate a triunghiului DOC.

2. Să se calculeze raza cercului circumscris trapezului ABFE în funcţie de latura a.

V. ALACI

791. — Doi jucători A şi B se învoesc ca cel ce va perde să întreiască banii căştigătorului din care să-şi reţină pentru sine 2 lei.

Câţi bani a avut jucătorul A, ştiind că după patru jocuri căştigătoare consecutiv, a rămas cu un leu?

I. DUMITRIU-ARAD.

792. — Să se pună sub formă de sumă a 2 radicali simpli, expresiunea:

$$E = \sqrt{a+2+\sqrt{4(a+1)+3b(2a-3b)}}$$

SUBLOCOT. NEGOESCU I. PETRE

793. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ x^3+y^3+z^3-xyz=35 \\ (x+y)(y+z)(z+x)=30. \end{cases}$$

CEZAR COSNITA

794. — Să se slabilească că avem:

$$\sum r_b r_c (r_a - r)(r_b - r_c) = 4p^2 r + \frac{2Rp^2 r(a\cos A + b\cos B + c\cos C)}{p}$$

RAMNICEANU I. CRISTIAN

INFORMAȚIUNI

Au mai trimes soluții la următoarele probleme, d-nii:

725* *Stan I. Aurelian* (absolvent, lic. Milit. Iași).

739 *Cincilia Agop* (lic. Brașov), *Dimitriu Al. Ioan* (absolvent, Galați), *Ionescu P. Haralambie* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu), și *Stoian N. C-tin* (lic. Botoșani).

745* *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (Șc. Polit. București), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru-Haret, București), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Petrică I. Ioan* (Conductor Technic, Cluj), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov) și *Sprinceană Gheorghe* (Șc. Polit. București).

——

Recomandăm călduros corespondenților noștri, cartea „*Gândirea Matematică*“ a d-lui profesor universitar *Petre Sergescu*. (A se vedea la Bibliografie, 4).

——

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

——

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

——

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

——

Nu se pot lua în seamă pentru problemele de *Concurs*, de cât acelea sosite la timp și anunțate în revistă.

Problemele propuse de corespondenții înscriși la *Concurs*, se socotesc cu numărul de puncte corespunzător, ca oricărui rezolvitor înscris pentru *Concurs*.

——

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

——

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 5 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

——

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

Sucursala Timişoara

Supliment la R. M. T.
Vol. VIII

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE

Gheorghiu Gh. Gh.	Asupra unor probleme . . .	4
Cazanacli P.	Despre numerele lui Bernoulli	19
Linteş I. Căpitan	Asupra unor însumări . . .	35
Zaharia N.	Inegalităţi între elementele unui triunghiu	51
Coşniţă C.	Câteva inegalităţi	67
Gradin Gh.	Introducerea imaginarelor în geometrie	83
Ionescu-Bujor C.	Extinderi în geometria triunghiului	99
Vâlcovici V.	Derivata unui vector în mărime absolută	115
Alaci V.	O clasă de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice .	131
Coşniţă C.	Rezolvarea unor ecuaţiuni algebrice cu ajutorul identităţilor	147
Buicliu Gh. Col.	Relaţiuni metrice între elementele unui triunghiu plan . .	163
Buicliu Gh. Col.	Terţianele unui triunghiu . .	179

II. NOTE MATEMATICE

Zaharia N.	In *Gazeta Matematică* . . .	7
Tudose T.	Asupra problemei 437 . . .	7
Coşniţă V.	Două probleme de geometrie analitică	7
Linteş I. Căp.	Asupra problemei No. 142 . .	20
Linteş I. Căp.	Rezolvarea unei ecuaţii în numere întregi	20
Iacob E.	Asupra unor ecuaţii	21
Zaharia N.	Asupra problemei 560 din R. M. T.	22
Stan C.	Maximul sau minimul unei funcţiuni simetrice	36
Zaharia N.	Asupra unor identităţi algebrice	55
Zaharia N.	Asupra triunghiurilor în care avem $a^n = b + c$	69
Coşniţă V.	O problemă de algebră . . .	70
Agronomof N.	Sur quelques propriétés du simplex	85
Coşniţă V.	Calculul unei integrale . . .	86
Alaci V.	Asupra unei integrale	87
Linteş I. Căp.	Asupra problemei 706 . . .	102
Zaharia N.	Asupra unor inegalităţi . . .	102
Pârvu A.	Generalizarea problemei No. 3625 din G. M., vol. XXXIII, pag. 198	116
Roman I.	O generalizare	117
Zaharia I.	Generalizarea problemei 570 .	117
Murăroiu I.	O generalizare	136
Zaharia N.	Inegalităţi algebrice	136
Dumitrescu-Slatina Gh. M.	Teorema inchiderei	150
Stoenescu I.	Asupra unei probleme de examen dela Şcoala Politecnică din Timişoara, R. M. T. No. 10., an. II, pag. 151 . . .	150
Ionescu H.	Generalizarea unei probleme .	151
Buicliu Gh. Col.	Generalizarea problemei 737 .	166
Râmniceanu C.	Aria unui triunghiu în funcţie de raza cercului înscris şi razele cercurilor exînscrise . .	166
Coşniţă C.	Asupra unor inegalităţi . . .	180

III. BIBLIOGRAFII

Gazeta Matematică 8, 22, 38, 56, 71, 89, 104, 118, 138, ... 152, 167, 183.

Revista de Ciencias 8, 56, 104.

Angheluţă Th. Sur les noyaux symétriques et symetrisables généralisés 6

Gârniţeanu M. La corection du temps par l'équation tropique 71

Bulletin mathématique d la Société Roumaine des Sciences . . . . . 89, 139.

Vrânceanu G. Sur les solutions périodiques complètement stables 118

Vrânceanu G. Sur les solutions périodiques à périodes trés lonques 118

Vrânceanu G. Sur quelques tenseurs dans les variétés non holonomes 118
Vrânceanu G. Sullo scostomento geodetico nelle varietà anolonome 118
Raclis R. Revista universitară matematică , . 138, 167
Buletinul Societăţii de Ştiinţe din Cluj 167
P. Sergescu Gândirea Matematică 167

IV. CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examen de fine de an. Geometrie Analitică . . 83, 103
„ de admitere în anul I 137
Examen de fine de an. Geometrie Analitică 122

V. PROBLEME REZOLVATE ŞI PROPUSE

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) vol. în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în vol. VIII. Problemelor care nu au nimic scris în coloana 4) nu li s-a publicat încă soluţia.

1).	2).	3).	4).
42	94	I	
50	110	„	
54	126	„	
69	142	„	
91	187	„	
98	187	„	
99	187	„	
100	187	„	
109	14	II	
110	14	„	
114	30	„	
120	30	„	
124	30	„	
140	62	„	
141	62	„	
150	78	„	
154	94	„	
157	94	„	
161	94	„	
162	94	„	
163	94	„	
164	94	„	
165	94	„	
173	110	„	
174	110	„	
175	110	„	

1).	2).	3).	4).
176	126	II	
178	126	„	
184	126	„	
185	126	„	
186	142	„	
191	142	„	
194	142	„	
195	142	„	
198	158	„	
199	158	„	
206	174	„	
207	174	„	
208	174	„	
212	174	„	
213	174	„	
214	174	„	
217	185	„	
230	14	III	
235	30	„	
243	46	„	
244	46	„	
248	46	„	
253	62	„	
255	62	„	
259	62	„	
264	78	„	

1).	2).	3).	4).
268	78	III	
275	78	„	
289	126	„	
291	126	„	
296	126	„	
299	142	„	
310	174	„	
313	174	„	
315	174	„	
317	174	„	
319	185	„	
334	14	IV	
335	14	„	
336	14	„	
343	30	„	
344	30	„	
345	30	„	
347	46	„	
357	62	„	
359	62	„	
361	78	„	
369	94	„	
376	94	„	
382	110	„	
390	126	„	
393	126	„	
401	158	„	
406	158	„	
407	158	„	
411	158	„	
414	174	„	
418	174	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V	
440	30	„	
442	30	„	
444	30	„	
445	46	„	
450	46	„	
458	62	„	
460	62	„	
462	62	„	
464	78	„	
473	94	„	

1).	2).	3).	4).
474	94	V	
475	94	„	
478	94	„	
479	94	„	
485	110	„	
489	126	„	
502	142	„	
507	159	„	
508	159	„	
509	159	„	
512	159	„	
514	174	„	
516	174	„	
518	190	„	
519	190	„	
524	190	„	
526	14	VI	
527	14	„	
528	14	„	
531	14	„	
533	30	„	
534	30	„	
535	30	„	
537	30	„	
540	46	„	
541	46	„	
542	46	„	
543	46	„	
544	46	„	
548	46	„	
549	62	„	
550	62	„	
557	78	„	
558	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
611	190	„	38
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
617	22 / 118	VII	39
622	22	„	

1).	2).	3).	4).
628	38	VII	
	118		
629	38	„	22
	118		
634	54	„	
635	54	„	
639	54	„	
646	72	„	
649	86	„	
652	86	„	
653	86	„	9
653 bis	102	„	
654	102	„	10
655	102	„	
656	102	„	
657	102	„	
658	102	„	
659	102	„	10
660	102	„	23
661	118	„	11
662	118	„	
663	118	„	12
664	118	„	25
665	118	„	25
666	134	„	12
667	134	„	
668	134	„	
669	134	„	26
670	134	„	27
671	171	„	30
672	134	„	56
673	134	„	
674	154	„	13
675	154	„	28
676	154	„	56
677	154	„	28
678	154	„	40
679	154	„	71
682	170	„	74
683	170	VIII	152
	94		

1).	2).	3).	4).
684	170	VII	41
685	170	„	89
686	170	„	90
688	170	„	42
689	190	„	42
690	190	„	58
691	190	„	91
692	190	„	29
693	190	„	104
694	190	„	92
695	190	„	
696	190	„	75
697	206	„	43
698	206	„	44
699	206	„	167
700	206	„	105
701	206	„	106
702	206	„	
703	206	„	58
704	206	„	45
705	14	VIII	59
706	14	„	59
707	14	„	93
708	14	„	118
709	14	„	75
710	14	„	60
711	14	„	60
712	14	„	76
713	30	„	76
714	30	„	77
715	30	„	78
716	30	„	120
717	30	„	138
718	30	„	121
719	30	„	122
720	30	„	139
721	46	„	108
722	46	„	108
723	46	„	124
724	46	„	169
725	46	„	183

1).	2).	3).	4).
726	46	VIII	124
727	46	„	125
728	46	„	
729	62	„	140
730	62	„	125
731	62	„	170
732	62	„	140
733	62	„	152
734	62	„	153
735	62	„	153
736	62	„	154
737	78	„	155
738	78	„	171
739	78	„	185
740	78	„	155
741	78	„	172
742	78	„	157
743	78	„	172
744	78	„	157
745	94	„	186
746	94	„	173
746	94	„	
747	94	„	
748	94	„	
749	94	„	173
750	94	„	750
	110	„	
751	94	„	
752	109	„	
753	110	„	
754	110	„	
755	110	„	
756	110	„	
757	110	„	
758	110	„	
759	126	„	

1).	2).	3).	4).
760	126	VIII	
761	126	„	
762	126	„	
763	126	„	
764	126	„	
765	126	„	
766	126	„	
767	142	„	
768	142	„	
769	142	„	
770	140	„	
771	140	„	
772	140	„	
773	158	„	
774	158	„	
775	158	„	
776	158	„	
777	158	„	
778	158	„	
779	158	„	
780	174	„	
781	174	„	
782	174	„	
783	174	„	
784	174	„	
785	174	„	
786	174	„	
787	190	„	
788	190	„	
789	190	„	
790	190	„	
791	190	„	
792	190	„	
793	190	„	
894	190	„	

VI. INFORMAȚIUNI

La paginele: 15, 31, 47, 63, 79, 95, 111, 127, 143, 159, 175 și 191.

TABLOUL NUMELOR

Abason A., 2.
Abramescu N., 2, 117, 167.
Adam R., 2.
Adamescu M., 2.
Alaci V., 2, 3, 4, 10, 14, 18, 19, 25, 30, 34, 35, 42, 46, 50, 51, 56, 58, 62, 66, 67, 75, 78, 82, 83, 88, 93, 94, 98, 99, 110, 114, 115, 122, 126, 129, 130, 131, 140, 142, 143, 146, 147, 158, 162, 163, 174, 178. 179, 190.
Albeață E., 10, 11, 12, 13, 24, 26, 28, 31, 38, 39, 41, 42, 57, 90 91.
Aldea N., 10, 11, 13, 27, 31, 38, 39, 41, 42, 44, 45, 57, 59, 60, 77, 78, 90, 92, 93, 109, 121, 122, 125, 129, 152, 153, 154, 155, 158, 171, 174, 186.
Alembert D'., 83.
Alexandrescu Elena., 3.
Alexandrescu I., 11, 29, 92.
Agronomof N., 22, 71, 86.
Almăjean P., 10, 30, 39, 42, 44, 45, 59, 77, 107, 108, 109, 121, 124, 125, 126, 139, 153, 158, 172.
Anghelescu A., 2, 167.
Angheluță T., 2, 56, 167.
Antonescu A., 13, 28, 38, 57.
Antonescu I. C., 41.
Antoniu E., 107.
Antoniu V., 143.
Arganini V., 59, 60, 61, 76, 77, 108, 109, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 139, 140, 153, 154, 155, 157, 170.
Arghir I., 2.
Arsene A., 10, 11, 13, 24, 25, 28, 31, 39, 40, 41, 42. 44, 45, 57, 59, 60, 62, 74, 77.
Aubert., 170.
Avramescu T. I., 10, 24, 38, 42, 44. 45, 59.

Bâcicov P. B., 13, 41, 42, 44, 45, 59, 77, 125, 152, 153, 154, 155, 171, 172, 173, 174, 186.
Bâcicov P. V., 13, 41, 42, 44, 45, 59, 74, 77, 125, 152, 153, 154, 155, 171, 172, 173, 174, 186.
Baciu G. T., 11, 24, 29, 38, 39, 43, 44, 57, 93, 106, 139, 155.
Bădescu I. A., 10, 13, 23, 25, 31, 39, 42, 44, 45, 74, 139.
Bădulescu V., 2.
Băjenescu A. P., 39, 42, 44, 77, 125, 126, 152, 153, 154, 155.
Balaban Gh., 2.
Balaban I. Gh , 11, 14, 25, 27, 28, 39, 40, 42, 45, 58, 78, 110, 172.
Balaban N., 2.
Bălășescu N. C., 142.
Balasz D., 2.
Bălcescu D., 38.
Bănărescu M., 2.
Băncilă Gh., 27, 40, 60, 62, 77, 93, 109, 124, 126.
Banciu I., 2.
Barbilian D., 89, 138.
Bărbulescu N., 167.
Bârloiu D. N., 45, 126.
Barna L., 93, 122, 124, 143.
Baron C., 2.
Bass E., 143.
Bernoulli J., 19, 20.
Berzovan E., 40, 41, 45, 59, 60 77.
Beșchea G. N., 38, 56.
Biernacki M., 167.
Bihoiu I., 39, 42, 44. 45, 59.
Blașian V., 2.
Boconcios I., 143.
Böhm W., 43, 45.
Bolgar D., 152.
Boncea N. S., 10, 11, 13, 24, 29, 38, 41.
Bonțideanu., 4, 143.
Bordeianu A., 11, 31, 39.
Boroianu D. C., 43, 45, 57, 77, 124, 126.
Botea G. N., 46, 90, 109, 138, 169, 170,
Botez M., 2.
Brăileanu G., 143.
Brașovan G., 143.
Bratoșin I , 10, 11, 25, 26, 31, 39, 57, 171, 172, 174.
Bratu G., 2, 118.
Breazu D.. 2.
Brezuică J. I., 142.
Brottmann I., 10, 11, 13, 25, 43, 44, 45, 57, 59, 61, 77, 108, 109, 126, 139, 152, 157, 172, 174.
Bugeanu O., 55.
Buicliu Gh., 2, 14, 38, 60, 74, 78, 94, 142, 143, 155, 161, 163, 166, 167, 174, 177, 179, 183, 186, 190.
Burghele C., 2.
Butoescu T., 2.

Călin M. Gh.. 38.
Cândea C , 2.
Capriel H., 118.
Caraciuc S., 147.
Caraman E., 2.
Cărdeiu V., 2.
Carp I., 60, 77, 121, 174.
Cazacu V., 143.
Căzămir I., 10, 11, 14, 27, 28, 38, 39, 43, 44, 45, 93, 107.
Cazanacli P., 19.
Cehlarov A., 167, 183.
Cernăuți I., 10, 24, 28.
Cercel L., 59.
Chirilă S. I., 29, 44, 45, 57, 60, 174.
Chivulescu C., 2, 38.
Ciancilian A., 59, 62, 76, 107. 109, 122 124, 125, 139, 153, 154, 191.
Cica Gh., 2.
Cimpoia V., 143.
Cinsky C., 74.

Cioclov Gh. Gh., 11, 13, 25, 28, 29, 39, 41, 42, 58, 76, 93, 141, 143, 172, 174.
Cisman I., 41.
Cismărescu., 2.
Cismaru I., 92.
Ciupe A., 126, 174.
Ciurceu V., 2.
Climescu C. A., 9, 10, 11, 13, 25, 28, 42, 57, 60, 62, 77, 90, 92, 108, 121, 125, 139.
Cocârlan P., 11, 24, 29, 38, 39, 109, 143, 153.
Codreș I. F., 126.
Coleșiu A., 143.
Coman A., 2.
Comberousse., 167.
Constantin N. Ș., 126.
Constantinescu Gh., 2, 28.
Corneanu P., 2.
Corpaci I., 143.
Corral J. J., 56.
Coșniță C., 10, 11, 13, 14, 26, 27, 29, 30, 31, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 46, 54, 57, 58, 59, 60, 65, 67, 75. 76, 77, 78, 90, 92, 94, 107, 108, 110, 121, 122, 124, 125, 126, 139. 140, 142, 145, 147, 15', 153, 154, 155, 156, 157, 158, 169. 171, 172, 173, 174, 183, 185, 189, 190,
Coșniță V., 8, 71, 87, 138.
Costăchescu V. C., 9, 23, 25, 27, 30, 41, 45, 62, 92, 121, 125, 139, 154, 172, 186.
Crăciunescu N, E., 14, 24, 31, 57, 75, 90, 91.
Crăciunescu I., 2, 25, 31.
Crăciunescu M., 38.
Craiu N. I., 11, 24, 25, 27.
Cristescu A. A., 77.
Cristescu I., 2.
Cristescu V., 71.
Cuncic A., 143.
Cuțui L., 173.

Dănciulescu Gr. V., 9, 10, 11, 13, 22, 25, 28, 30, 31, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 56, 58, 60, 74, 75, 76, 77, 90, 91, 92, 93, 108, 109, 120, 121, 122, 123. 125, 126, 139, 141, 152, 153, 154 155, 156, 157, 158, 171, 172, 173, 174 185, 186, 190, 191.
Dorobanțiu I., 143.
Dăscălescu S. H., 9, 10, 11, 12, 13, 24, 26, 27, 38, 39, 40, 43, 57, 59, 121, 125, 153, 158.
David I., 74.
Davidsohn M., 10, 39, 43, 44, 45, 59
Delinschi A., 143,
Demetrescu N. A., 10, 11, 25, 27, 29, 31, 39, 41, 42, 44, 45, 57, 59, 75.
Demetrescu Gh., 2.
Demian C., 143.
Diaconescu H. A,, 11, 13, 39, 92.
Diaconescu N., 2.
Diaconu H. A., 10.
Dimitriu-Arad I., 2, 14, 30, 46, 77, 78, 106, 118, 172, 183, 190.
Dimitriu At. I., 10, 11, 12, 13, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 56, 57, 74, 75, 90. 92, 93, 108, 109, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 139, 153, 167, 169, 172, 174, 191.
Dinu S. D., 25, 27, 41, 57.
Dobromirescu P., 10, 11, 13, 24, 25, 27, 31, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 57, 59, 74, 77, 90, 92, 93, 108, 121, 122, 125, 126, 140. 141, 153, 154, 158, 171, 186,
Dogaru R., 143.
Dordea Tr, 2, 35.
Dospil E., 143.
Dumitrescu Gh., 2.
Dumitrescu N., 10, 11, 13, 24, 39, 43, 45. 94, 109, 120, 139, 143, 153. 154, 157, 158, 172, 173.
Dumitrescu-Slatina Gh. M., 1 0.
Duțulessu M., 2.
Dragalina C., 2.
Drăgan I. C., 11.
Dragomirescu G., 143.
Dragoș T., 31, 40.
Drăgușeanu O., 11. 13, 27, 28, 39, 40, 43, 91.
Drăguț G. V., 10, 11, 13, 27, 28, 31, 38, 39, 42, 43, 44, 45, 75, 92, 152, 153, 154, 155, 158, 170, 171, 174, 186,
Driga N., 143.
Drinceanu A. B., 174.

Engelmann A., 27, 29, 30, 44.
Ettinger A., 9, 10, 23, 27, 31, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 57, 58, 60, 77, 92, 94, 106, 123, 139.
Euler., 56, 100, 102, 131, 132, 133, 134, 135.

Ferenczi D., 143.
Fericeanu Șt., 38.
Fermat., 140.
Filiti R., 143.
Floareș I. M., 24, 38.
Florescu B. I., 63.
Florescu M., 2.
Focșeneanu M., 89, 104, 118.

Gaidaienco A., 153.
Găină G., 143.
Ganea D. V., 8, 10, 13, 27, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 74, 108, 120, 157, 172.
Garcia G., 8, 56, 104.
Gârd I. D., 13, 38.
Gârneșteanu M., 71.
Gauss., 152.
Gavrilescu M., 11, 13, 24. 27, 40, 43, 56, 59, 76.
Gavrilescu V., 45, 62, 77, 109, 122, 124, 140, 152, 153, 154, 155, 171, 174.
Georgescu D., 2.
Georgescu I. P., 124.
Georgescu T. P., 126.
Georgescu-Racoviță I., 7.
Gergonne., 100.
Gheorghe Gh. M., 11, 13, 23, 25, 27, 28, 31, 38, 39, 41, 42, 43, 57, 59, 60, 63, 75, 77, 90, 92, 93, 94, 106, 108, 109, 121, 122, 125, 126, 139, 140, 153, 154, 158, 170, 186.
Gheorghiev N., 24, 27, 29, 41, 43, 45, 92, 106, 122, 124, 125, 126, 140, 143, 153, 154, 157, 171, 173, 174, 186.
Gheorghiu A. A., 10, 11, 13, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 57, 59, 62, 77, 92, 93, 94, 124, 125, 140.
Gheorghiu Th. Gh., 4, 10, 13, 28, 30, 31, 39, 41, 42, 44, 45, 57, 58, 59, 60, 62, 74, 75, 76, 77, 78, 90, 93, 94, 105, 106, 107, 108, 109, 120, 125, 138, 140, 153, 167, 169, 173.
Gheorghiu Gh. M., 11, 13, 27, 41, 43, 44, 45, 75, 77, 92, 109, 120, 140, 143, 158.
Gheorghiu Th. M., 57,
Gheorghiu N., 142.
Ghermănescu M., 2.
Ghimuș T., 8.
Ghișoiu P., 12, 13, 24, 25, 27, 28, 29, 31, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 57, 59, 60, 62, 74, 75, 76, 77, 90, 92, 93, 94, 106, 108, 109, 120, 121, 124, 125, 126, 139, 140, 142, 152, 153, 154, 155, 157, 158, 170, 171, 172, 173, 174, 185, 186, 191.
Giurgiuți D., 143.
Gobjilă L., 143.
Goldstein G. A., 38.
Gorezynski L., 104.
Goursat., 87.
Gradin Gh., 8, 83.
Grațian C. T., 39.
Groșescu T. C., 62.
Grossu M., 126, 172, 173, 174.
Grünberg M., 39, 43.
Guha F., 30, 125.

Haim F. L., 13, 31, 38, 57.
Haimovici A., 11.
Hamerack C., 39, 43, 44, 45, 57, 77, 107. 174.

Hamparţum Gr., 10, 39, 59, 77, 109, 121, 125, 153.
Handler Gh., 10, 44, 45, 59, 77, 124,
Hanicska O., 143.
Hanţila F., 94, 107, 120.
Hascal J., 41, 45, 59.
Hermite., 8, 166.
Herrera F., 104.
Hohoi V., 10, 11, 13, 23, 24, 27, 28, 31, 40, 41, 42, 57. 109, 120, 122, 124, 139, 140.
Hopital., 57, 106.
Hristea H., 2.
Hubert M., 2.

Iacob S. E., 10, 11, 12, 13, 14, 22, 23, 25, 28, 30, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 57, 58, 59, 62, 76, 77, 78, 94, 121, 124, 125, 140, 152, 153, 155, 158, 170, 172, 190.
Iancu D., 10, 13, 24, 29, 31, 38, 41, 42, 43, 44, 45, 57, 59, 60, 62, 75, 77, 78, 90, 92, 93, 94, 108, 120, 121, 122, 124, 125, 140, 167.
Ignat P., 11.
Iliescu P., 11, 27.
Iliescu Th. T., 38.
Iliovici G. C., 10, 11, 12, 23, 27, 39.
Iliuţă-Dăbuleni I., 126.
Imre-Macri Ş. T., 90.
Ioachimescu G. A., 76.
Ionescu C., 60.
Ionescu-Bujor C., 97, 99.
Ionescu C. C., 10, 11, 13, 25, 27, 28, 31, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 57, 59, 60, 74, 77, 90, 91, 94, 122, 125.
Ionescu D. C., 74, 122.
Ionescu K. C., 2.
Ionescu Gh., 11, 27, 30, 41, 43, 45, 90 92, 94, 107, 120, 122. 125, 143, 172.
Ionescu M. H., 28, 29, 40, 42, 90.
Ionescu P. H., 77. 108, 109, 122, 124, 126, 151, 152, 153, 155, 171, 191.
Ionescu I., 10, 13, 27, 39, 183, 187.
Ionescu N. M., 38.
Ionescu V., 143.
Ionescu Gh. V., 39.
Ionescu-Ţiu D. C., 11, 12, 13, 23, 25, 27, 28, 29, 31, 39, 41, 43, 42, 45, 57, 59, 60, 62, 75, 77, 90, 92, 93, 94, 105, 108, 109, 120, 121, 124, 125, 126, 139, 140, 141, 152, 153, 154, 155, 157, 158, 169, 171, 172, 173, 174, 185, 186, 191.
Iotta D. M., 126.
Ivanovici I. N., 10, 11.
Ivanovici T. V., 39‘ 43.
Ivar-Fredholm L. T., 89.

Jaques L., 10, 11, 13, 25, 27, 31, 39, 42, 44, 45, 57, 59, 61, 77, 92, 94, 108, 109, 125, 140, 153, 156, 157, 172, 174,
Jecu I., 2.
Julea D. V., 11, 92.
Jumanca Z., 39, 44, 45, 77, 107.
Jurca C., 45, 92, 109, 148.

Kroneczny A., 11.

Lacea N., 143.
Ladislau R., 10, 39, 43, 44, 45, 59, 77, 107.
Lagrange., 28.
Laissant A. C., 147.
Lalescu T., 2.
Landt G., 143.
Laplace., 167.
Leibovici R. E., 11, 41.
Leibnitz., 19.
Lemoine., 101, 102.
Lenghel Elena., 10.
Leonida D., 2.
Levit A., 77.
Lică I. V., 29, 43.
Licev I., 77, 78, 108, 109, 121, 122, 124, 125, 126, 139, 140, 143, 152, 153, 155, 156, 157, 172, 173, 174.
Linteş I., 2, 20, 21, 22. 30, 33, 35, 56, 62, 76, 102, 104, 152.
Liteanu Gh., 2, 8.
Livalet V., 76.
Longchamps., 147.
Lucas E., 35.
Lungu D., 143.
Lupan A., 2.
Lupea I., 143.
Lupu N., 76, 77, 94, 121, 122, 124, 139, 140.

Mac-Laurin., 19.
Magda O., 10, 11, 27, 39, 40, 104, 126, 152, 153, 189.
Magheru I., 2, 143.
Maior A., 167.
Mălăescu T., 11, 27.
Malcoci C., 8, 152.
Manoil A., 38.
Manolescu I. N., 38, 72.
Manughevici C., 3.
Mărăşescu I., 27, 41, 92.
Mărculescu I. O., 38, 106, 153, 157.
Mardan D., 3.
Marinaş M., 60, 120, 121, 122, 125, 158. 170, 171.
Marineanu T. T., 10, 12, 24, 44.
Marinescu E. D-ra., 59.
Măţu P., 44, 45.
Mazilescu I. D., 10, 13, 27, 39.
Menalaus., 116.
Mereuţă E., 158.
Michels I., 143.
Micula O., 10, 11, 13, 24, 25, 27, 28, 29, 41, 43, 45, 57, 60, 90, 94, 107, 108, 109, 120, 121, 122, 123, 125, 139, 140, 141, 143, 153, 154, 156, 157, 158, 172, 173, 174, 185, 186,
Mihăilescu F., 143.
Mihaiu Gh.. 74.
Mihalcea E., 174.
Mihaly E., 3.
Mihuţ M., 11, 27, 39, 41, 43, 44, 45, 94, 107, 120.
Milea G. E., 121, 140, 152, 153, 157, 171,
Miquel., 171.
Mioc V., 3.
Mittag-Leffler G., 89.
Miu C., 143.
Mocănescu C. I., 59, 109, 126.
Mocuţa T. T., 10, 11, 27, 38, 39, 143,
Moicescu., 40.
Moivre., 56.
Montel P., 89, 167.
Morţun A. C., 10, 11, 25, 26, 27, 39, 41, 42, 43, 45, 57, 60, 62, 90, 92.

Naneş Gh.. 3.
Nazim S. H., 27, 62, 94.
Neacşu V., 11, 24, 27, 39, 41, 43, 44, 45, 92, 94, 121, 122.
Negoescu I., 41.
Negoescu I. P., 59, 94, 139, 190.
Negrea A. M., 57, 109, 122, 125, 126, 139, 140, 154, 156, 157, 158, 172, 173, 186.
Nestor D., 167.
Newton., 7, 8.
Nichifor Gh., 3.
Nichiforescu Gh., 59, 60, 61, 76, 77, 94, 108, 109, 121, 122, 124, 125, 126, 140, 152, 153, 154.
Nicolae Gr., 174.
Nicolau A., 3.
Nicolau V. Gh., 56, 57, 110, 189.
Nicolau M., 89, 138.
Nicolau P., 3.
Nicolescu C., 143.
Nicov A., 143.
Niculescu A., 8, 167.
Niculescu C., 3.
Niculescu M., 167,
Niewenglowski B., 63.
Niţulescu Gr. V., 25, 38, 39.
Novac A., 11.

Oighenştein D., 10, 11, 14, 31, 39, 40, 43. 59, 60, 62, 92, 94, 120, 126, 141, 153.

Oncica I., 3.
Onicescu O., 3, 89.
Orăşeanu C., 3.
Orăşeanu Gr., 3.
Otopeanu C., 3.

Panaite N. T., 13, 14, 24, 25, 27, 28, 31, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 57, 58, 59, 60, 62, 75, 77, 90, 91, 92, 94, 122, 125, 140, 170.
Panaitescu C. I., 10, 11, 14, 38, 39, 43, 57, 77, 90, 92, 109, 122.
Pantazi M. A., 38.
Panţu Z. I., 10, 11, 12, 13, 14, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 56, 58, 59, 60, 62, 74, 75, 76, 77, 90, 92, 93, 94, 105, 108, 10 , 120, 121, 122, 124, 125, 126, 139, 140, 142, 152, 153, 154, 155, 156, 158, 171, 172. 173, 174, 185, 18 , 189.
Paraschivescu S., 143.
Pârvu A., 11. 24, 26, 27, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 59, 61, 77, 78, 94, 106, 109, 117, 122. 123, 126, 154, 157, 186,
Pârvu V., 77, 107.
Pârvulescu M. S., 14, 38, 39, 57.
Paşca I., 27.
Pascal I., 124.
Păteanu N., 143.
Patega I., 185.
Paul E., 110.
Pavel H. N., 10. 14, 25, 28, 31, 38, 39, 42, 43, 45, 57, 58, 90, 92.
Pavel-Onizaba N., 190.
Petrescu A., 3.
Petrică I. I., 31, 41, 42, 43, 45, 58, 60, 76, 77, 90, 92, 94, 122, 139, 140, 152, 155, 156, 157, 158, 171, 172, 173, 174, 186, 190, 191.
Petricoane M., 3.
Petrovici D., 10, 14, 24, 38, 90, 125, 152, 153, 154, 172, 173, 174, 189.
Pleşoiu I., 24.
Podariu A., 10, 24, 38.
Pogăceanu S., 143.
Pompeiu D., 89, 138, 150, 167.
Pop A., 143.
Popa St., 38.
Gh., 152, 191.
O. A., 57, 59, 77, 90, 92, 109, 140, 153, 174.

24, 25, 28, 29,
76, 94, 109,

Popescu L. N., 59.
Popescu Gh. O., 13, 25, 38, 45, 58.
Popescu St., 75.
Popescu D. St., 10, 14, 38, 39, 40, 42, 45, 46, 59, 60, 108.
Popescu St. T., 10, 12, 24, 26, 38, 39.
Popescu C. V., 10, 12, 23, 27, 38, 39, 40, 43, 44, 45, 59, 94. 120, 157.
Popluca M., 38.
Popovici C., 89.
Popovici T. I., 89, 91.
Popovici M., 10, 12, 25, 26, 27, 28.
Popoviciu T., 38.
Procopiescu S. N., 10, 12, 14, 27, 38, 39, 41, 43, 45.

Racliş N. R., 71, 89, 138, 167.
Rădulescu C., 143.
Râmniceanu I. C., 10, 12, 13, 14, 24, 25, 27, 28, 29, 31, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 58, 59, 60, 62, 75, 77, 90, 91, 93, 94, 107, 109, 121, 122, 125, 126, 139, 140, 152, 153, 154, 157, 158, 166, 170, 171, 172, 173, 174, 190.
Rapaport L., 60, 61, 76, 77, 94, 109, 124, 125, 140.
Răşcanu P. C., 59, 60, 61, 77, 94, 109, 124, 125, 140.
Reinfeld E., 143.
Reinheimer C., 143.
Rivalet B. V., 94, 124, 140.
Roibănescu I., 3.
Roman I. I., 12, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 57, 58, 59, 60, 62, 74, 75, 76, 77, 90, 91, 92, 93, 94, 106, 108, 109, 110, 117, 120, 121, 122, 124, 125, 126, 139, 140, 141, 152, 153, 154, 155, 157, 158, 170, 171, 172, 173, 174, 185, 186, 190.
Rosenblatt A., 167.
Rouchè E., 167.
Rughinov G., 14.

Sabetay L. A., 12, 126, 153, 157, 174,
Saegiu E., 3.
Saligny A., 152.
Săndulescu I. I., 126.
Sassu V. I., 10, 14, 28, 29, 31, 38, 43, 44, 45, 59, 60, 94, 126, 152, 153, 155, 172, 174.
Saur A I., 10, 11, 14, 24, 25, 30, 31, 41, 43, 44, 45, 58, 59, 60, 75, 77, 94, 107, 124, 125, 126, 140, 143, 157, 172, 174.
Savin A., 10, 12, 24, 26, 27, 40, 43, 59, 120, 125.
Savin C. I., 10, 12, 13, 14, 24, 25, 27, 28, 31, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 58, 59, 60, 62, 75, 76, 77, 90, 91, 93, 94, 108, 109, 121, 122, 124, 125, 126, 139, 140, 142, 152, 153, 154, 155, 157, 158, 171, 172, 173, 174, 185, 189.
Scarlat D., 10, 24, 38, 43, 44, 45, 125, 152, 153, 154, 155, 171, 172, 174, 189,
Schiopu I., 143.
Scripcă M., 10, 12, 14, 24, 25, 27, 39, 41.
Scurtu A. N., 12, 14, 23, 24, 27, 28, 40, 41, 120, 121, 124, 140, 143, 178.
Scurtu G. N., 171, 185.
Secăroiu D., 10, 11, 12, 14, 24, 25, 26, 30, 31, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 58, 59, 60, 62, 75, 76, 77, 90, 92, 93, 94, 107, 108, 109, 120, 121, 122, 125, 136, 139, 140, 142, 152, 153, 154, 155, 157, 158, 171, 172, 174, 186, 191.
Segârceanu D. C., 38.
Segârceanu C. N., 183.
Serbănescu D., 3.
Sergescu P., 3, 8, 167, 174, 191.
Severineanu C., 3.
Şidaşenco V., 143.
Silaghi A., 41, 92.
Silvian E., 29, 31, 60, 121, 124, 126, 152, 171.
Simionescu Gr. 14, 27, 43, 77, 92, 04, 140.
Simniceanu S, 3.
Sion R, 143
Sirchis G., 185.
Sirchis I., 10, 11, 12, 13, 14, 23, 25, 28, 29, 31, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 57, 58, 59, 60, 63, 75, 77, 92, 94, 106, 108, 109, 120, 121, 124, 125, 139, 140, 153, 154, 155, 157, 158, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 186.
Şişu Gh., 12, 27, 92.
Slicaru C., 24, 45.
Şoimu I., 94, 120.
Şoimulescu I., 12, 39.
Solniţeanu V. N., 39.
Şova I., 143.
Spineann C., 3.
Sprinceană C. I., 39, 76.
Sprinceană Gh., 10, 12, 13, 14, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 39, 41, 42, 43, 45, 46, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 74, 75, 76, 77, 90, 91, 94, 104 108, 109, 120, 121, 122, 124, 125, 116, 139, 140, 142, 153, 154.
Stan I. A., 10, 12, 25, 28, 29, 30, 31, 39, 40, 41, 42, 43, 58, 59, 60, 62, 74, 75, 76, 77, 90, 91, 92, 93, 94, 106, 108, 109, 120, 121, 122, 125, 126, 139, 140, 142, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 171, 172, 173, 174, 185, 189, 101,
Stan C., 38, 41, 90.
Stănescu C., 3.
Stănescu I. P., 122.
Stănescu N. P., 77.
Steblea S. St., 26, 39.
Ştefănescu E., 62, 112, 140.
Stoian N. C., 44, 45, 59, 122, 191.

Stoenescu A. I., 143, 151.
Stoicescu M., 3.
Stoinescu N. P., 90, 92.
Stratulat P., 59, 124, 126, 153.
Streit A. V., 10, 14, 28, 31, 39, 43, 44, 45, 59, 60, 61, 76, 77, 94, 122, 140.

Tache Z. D., 43, 44.
Tăras V., 78, 143, 171.
Tătulea D., 12, 2«.
Taylor., 101.
Teodorescu A., 10, 24, 58.
Teodorescu C. C., 3, 4, 18, 19, 34, 35, 50, 51, 66, 67, 82, 83, 98, 99, 114, 115, 130, 131, 146, 147, 162, 163, 178, 179.
Terzici A., 143.
Teodosiu A., 3.
Thébaut V., 22, 38, 56, 71, 104, 138, 152.
Thierrin G., 3.
Ţino O., 3, 138, 152.
Ţiţeica G., 56
Ţiucra M., 10, 12, 14, 25, 27, 39, 42, 43, 45, 58, 92, 109, 122, 125, 126, 140, 152, 153, 154, 155, 158, 171, 177, 174,
Tiugan M., 10, 14, 39.
Tomescu C. N., 12, 39, 59.
Tomescu V., 27, 39.
Topliceanu C. C., 27, 107.
Topliceanu D. C., 12, 41, 43, 45.
Trofimof P., 174.
Trufin V., 143.

Ungureanu D. G., 14, 28, 39.

Vâlceanu N. J., 10, 12, 13, 14, 24, 26, 27, 31, 39, 41, 43, 44, 45, 57, 59, 60, 75, 77, 78, 92, 94, 108, 109, 120, 121, 122, 124, 125, 139, 140, 142, 152, 153, 154, 155, 157, 171, 172, 173, 174, 186, 187.
Vâlcovici V, 3, 89, 113, 115, 126, 142. 143.
Vallée-Poussin, 19.
Vâlsănescu V. V., 13, 27, 28, 45, 77, 125, 153.
Vardala I., 152.
Vasilescu Fl., 89.
Vasiliu Gh. Gh., 3, 9, 10, 24, 39, 41, 80.
Vasiliu C. I., 62, 170.
Vasiliu M., 3.
Vasiliu N., 143.
Vinițchi D, 143.
Vlad F. F., 41, 44, 45, 77, 94, 122.
Vlad V., 3.
Vlahoviciu A., 143.
Voicu I., 143.
Vonica C. I., 10, 12, 14, 24, 26, 27, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 59, 75, 77, 78, 92, 109, 120, 139, 140, 158, 173, 186.
Vrânceanu G., 80, 118.

Weintraub M., 39.
Wronsky., 8, 56, 104.

Zagaican I., 39
Zaharia O. I., 10, 11, 12, 14, 23, 24, 25, 27, 39, 42, 24, 44, 45, 58, 90, 118.
Zaharia O. N., 7, 10, 13, 14, 22, 23, 24, 26, 27, 29, 30, 39, 40, 43, 44, 45, 49, 51, 56, 57, 59, 60, 62, 70, 76, 77, 94, 103, 109, 110, 120, 124, 125, 137, 140, 153, 154. 155, 157, 158, 181.
Zamfirescu-Pitești A, 94.
Zapan Gr., 3, 68.
Zdetoveţchi N., 143.
Zebacinschi M., 143.
Zelţer., 4, 43.

Sucursala Timişoara

5 lei